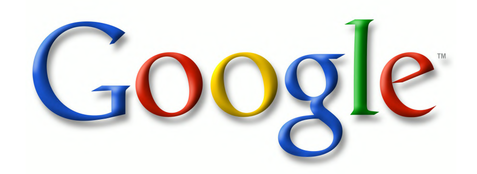



Hosted by Google

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XXV,1.

DR. GINO LORIA
ORD. PROFESSOR DER HÖHEREN GEOMETRIE AN DER UNIVERSITÄT GENUA

VORLESUNGEN ÜBER
DARSTELLENDE GEOMETRIE

AUTORISIERTE, NACH DEM ITALIENISCHEN MANUSKRIPT BEARBEITETE
DEUTSCHE AUSGABE

VON

FRITZ SCHÜTTE
OBERLEHRER AM GYMNASIUM ZU DÜREN

ERSTER TEIL: DIE DARSTELLUNGSMETHODEN

MIT 163 FIGUREN IM TEXTE



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1907

Vorrede zum ersten Teile.

Das Werk, dessen ersten Teil ich hiermit dem Drucke übergebe, enthält nicht eine vollständige Abhandlung der darstellenden Geometrie, da es nur den Zweck hat, einen Begriff zu liefern von den modernen Anschauungen jener Disziplin, die G. Monge zur Würde einer Wissenschaft erhoben hat, und den Leser in den Stand zu setzen, mit den ihr eigenen Methoden geometrische Aufgaben zu lösen und Untersuchungen auf ihrem Gebiete verstehen zu können. Der Titel, den dieses Werk trägt, wurde gewählt sowohl um Zweck und Natur desselben anzuzeigen, als auch ist er berechtigt, da es das Ergebnis der Vorlesungen über darstellende Geometrie ist, die von mir an der Universität Genua vom Wintersemester 1897/98 an gehalten worden sind.

Die theoretische und praktische Bedeutung der darstellenden Geometrie ist von dem Zeitpunkte ihrer Erfindung an anerkannt worden, und es hat stets den Anschein gehabt, daß sie eher noch fortwährend wachse, als sich vermindere; sagt doch sehr schön F. Klein[1]): „Ist es nicht eine ebenso würdige Aufgabe der Mathematik, richtig zu zeichnen, wie die, richtig zu rechnen?"

Über die Stellung jedoch, die sie in dem gesamten Gebiete der mathematischen Disziplinen einnehmen soll, sind die Mathematiker wenig einmütig[2]). Einige (unter welche der Verfasser sich leider nicht rechnen kann) verschmelzen sie, dem Beispiele Fiedlers folgend, mit der Geometrie der Lage, indem sie daraus ein Ganzes bilden, in welchem allerdings die darstellende Geometrie den Grundton abgibt. Andere hingegen, ohne ihre innige Beziehung mit den Theorien der modernen Geometrie zu leugnen, rechnen sie zu den angewandten Disziplinen[3]). Wenn man nun, mit Rücksicht auf die

---

1) Siehe P. Stäckel, *Angewandte Mathematik und Physik an den deutschen Universitäten* (Jahresber. der deutschen Math. Ver., XIII. B. 1904, S. 327).

2) Bezüglich dieser Frage informiere man sich durch den interessanten Artikel von G. Hauck, *Über angewandte Mathematik* (Sitzungsber. der Berliner Math. Ges. 28. Okt. 1903).

3) Vergl. die preußische Examensbestimmung vom Jahre 1898.

Anwendung, die man von unserer Wissenschaft in der Architektur, Technik, Kristallographie usw. machen kann, sie bloß als eine zweckmäßige Vorbildung für die Kunst des Zeichnens ansieht, so kann man zweifelsohne diese Ansicht billigen. Wenn man jedoch andererseits bedenkt, daß die Begriffe, auf denen sie beruht, und die Methoden, die sie fortwährend anwendet, sämtlich nur solche sind, die uns die alte Euklidische Geometrie und die moderne projektive Geometrie lehren, und daß alle durch sie vorgeschriebenen Verfahren so streng exakt sind, daß sie den Vergleich mit der Algebra und der Analysis wohl aushalten können (was man z. B. von der Geodäsie und Astronomie nicht sagen kann), so wird man sich veranlaßt sehen, stark an der Richtigkeit jenes Urteils zu zweifeln. In der Tat bietet uns die darstellende Geometrie die schönsten und lehrreichsten Beispiele für eine strenge und vollständige Entwicklung mehrerer nützlicher Methoden der eindeutigen Darstellung des ganzen Raumes auf eine Ebene[1]). Wir betrachten daher — indem wir die Theorie der Beleuchtung und Schlagschatten in das Gebiet der angewandten darstellenden Geometrie verweisen — die Wissenschaft, mit der wir uns in diesen Vorlesungen beschäftigen, als eine Provinz des großen Reiches der reinen Mathematik, jedoch als ein Grenzgebiet, bei dessen Überschreitung man in das Reich der Anwendungen gelangt.[2])

Den Plan des vorliegenden Bandes ersieht man aus dem ausführlichen Inhaltsverzeichnis, welches denselben eröffnet. Hier sei nur bemerkt, daß es mit einer summarischen Darlegung der Geometrie des Zirkels und der Geometrographie beginnt, aus Gründen, die wir im Texte angeführt haben und hier wohl nicht zu wiederholen brauchen[3]). Es folgt dann im I. Buche die Methode der doppelten Orthogonalprojektion, der nach unserer Meinung immer der Ehrenplatz in jeder Bearbeitung der darstellenden Geometrie gebührt, alsdann im II. Buche eine parallel verlaufende Darlegung der Methode der Zentralprojektion, in deren Wesen und Anwendung, nach den Arbeiten Wilhelm Fiedlers, niemand un-

---

1) Beispiele der eindeutigen Darstellung einer Oberfläche bietet bekanntlich die mathematische Geographie.

2) Ich freue mich, in dieser Beziehung mit G. Holzmüller in Übereinstimmung zu sein, der nicht zögerte, zu erklären: „an sich ist die darstellende Geometrie ein Teil der reinen Mathematik". (Jahresber. der deutschen Math. Ver., B. XIV, 1905, S. 250.) In gleichem Sinne spricht Herr F. v. Dalwigk (Das. XV, 1906, S. 352).

3) Dieses System, die darstellende Geometrie mit der vor etwa einem Jahrzehnte ins Leben gerufenen Geometrographie zu verknüpfen, findet sich auch in der vorzüglichen *Deskriptivní geometrie promítání parallelního* von Prof. J. Sobotka (Prag 1906), die während des Druckes des vorliegenden Werkes erschien

kundig bleiben darf. Das III. Buch ist der Methode der kotierten Ebenen gewidmet, die eine bekannte Verwendung in der Topographie findet und hier mit der Methode der Zentralprojektion verknüpft erscheint. Jede dieser Darstellungsmethoden wird in umfangreicher Weise zur Lösung der wichtigsten Aufgaben über Punkte, Geraden und Ebenen verwendet, und die vielen Einzelheiten, auf die wir eingegangen sind, werden die Billigung derjenigen finden, die wie Monge der Ansicht sind, daß „wer die Gerade und die Ebene glatt zu handhaben weiß, auf Hindernisse in der darstellenden Geometrie nicht stoßen wird". Außer diesen drei Darstellungsmethoden werden auch andere bekannt gegeben und Hinweise auf solche hier und da gemacht; jedoch haben wir uns nicht mit deren Entwicklung aufgehalten, um ihnen nicht eine Bedeutung beizulegen, die sie in Wirklichkeit nicht besitzen. Überdies wird der intelligente Leser hier alle Elemente für eine erschöpfende Behandlung derselben finden in dem, was ihm als Übungsstoff geboten wird.

Das IV. Buch betrifft die Axonometrie, eine komplementäre Methode, die von bemerkenswertem praktischem Nutzen ist und Gelegenheit zu theoretischen Entwicklungen von größtem Werte bietet; es genüge, den Satz von Pohlke anzuführen, der zweifellos einer der interessantesten der allgemeinen Geometrie und etwa der schönste aus der darstellenden Geometrie ist. Das V. Buch endlich ist den Grundlagen der theoretischen Photogrammetrie gewidmet, dem jüngsten Zweige, der im abgelaufenen Jahrhundert dem Stamme der hier behandelten Disziplin entsprossen ist, und von dem, wenn wir uns nicht täuschen, hier zum ersten Male in einer schulmäßigen Bearbeitung der darstellenden Geometrie die Rede ist. Diese Neuerung erschien uns ratsam zu sein, nachdem die fundamentalen Arbeiten Guido Haucks über diese Lehre ihren hohen Wert ans Licht gezogen haben, und nachdem die Praktiker sie als eine der schönsten Anwendungen der Photographie erkannt haben.

Bei unseren Lesern setzen wir als bekannt die Elemente der projektiven Geometrie voraus (etwa in den Grenzen, wie sie in den Vorlesungen von Prof. F. Enriques dargeboten werden), ebenfalls die der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes. Sehr empfehlen wir ihnen die sorgfältige Zeichnung, sowohl der vollständig behandelten, als auch der nur aufgestellten Aufgaben. Ebenso wie jemand, der ein Buch über Analysis studiert, die angeführten Rechnungen auch selber ausführen muß, so darf sich auch einer, der darstellende Geometrie betreiben will, nicht mit einer passiven Betrachtung bloß der Zeichnungen, die ihm vor Augen kommen, begnügen. Wir fügen hinzu, daß zum leichteren Verständnis der angeführten Beweise die Zeichnung der wirklichen Figuren, die wir aus

Gründen der Raumersparnis unterlassen haben, ihm von großem Nutzen sein wird.

Schließlich möge erwähnt werden, daß wir im allgemeinen die Quellen nicht zitiert haben, noch auch historische Anmerkungen gegeben haben, und zwar deshalb, weil eine Geschichte der darstellenden Geometrie das Schlußwort des vorliegenden Werkes bilden wird; das Schlußwort und nicht die Einleitung, weil erst, wenn man die Begriffe und Methoden einer Theorie schon kennt, ihre Geschichte interessieren und von unbestreitbarem Nutzen sein kann.

Unsere Vorrede würde eine beklagenswerte Lücke aufweisen, wenn sie nicht den Ausdruck meiner Anerkennung für das Haus des Herausgebers enthielte, der zum zweiten Male eine meiner Schriften in seiner Sammlung von Lehrbüchern der mathematischen Wissenschaften aufnimmt, und für Herrn Oberlehrer Schütte, der auch die Mühe der Zeichnung der Figuren übernommen hat, und diese in einer in jeder Hinsicht befriedigenden Weise ausgeführt hat.

Genua, im Februar 1907

Gino Loria.

Inhalts-Verzeichnis.

Einleitung.

I. Teil. **Die Darstellungsmethoden.**

Erstes Buch.

Die Methode der doppelten Orthogonalprojektion (Mongesche Methode).

Kapitel V. **Einführung einer dritten Bildebene.**

Kapitel VI. **Die Fundamentalaufgaben der Geometrie der Lage.**

Kapitel VII. **Andere Probleme der Geometrie der Lage.**

Kapitel VIII. **Geraden und Ebenen, die zueinander senkrecht stehen.**

Kapitel IX. **Umlegungen und ihre Anwendung bei der Lösung metrischer Aufgaben.**

Kapitel X. **Weitere Aufgaben der metrischen Geometrie.**

Kapitel XI. **Andere Kunstgriffe zur darstellend-geometrischen Lösung von Problemen der metrischen Geometrie.**

Zweites Buch.

Die Methode der Zentral-Projektion. (Freie Perspektive).

Kapitel I. **Allgemeines. Darstellung der Punkte, Geraden und Ebenen.**

Kapitel II. **Koten und Neigungen.**

Kapitel III. **Probleme der Geometrie der Lage.**

Kapitel IV. **Senkrechte Geraden und Ebenen.**

Kapitel V. **Umlegungen.**

Kapitel VI. **Verlegung der Grundelemente und Verschiebung der abzubildenden Figuren.**

Kapitel III. **Die orthogonale Axonometrie als Darstellungsmethode.**

Kapitel IV. **Schiefe Axonometrie.**

Kapitel V. **Perspektive Axonometrie.**

Fünftes Buch.

Photogrammetrie.

Kapitel I. **Definitionen und Hilfssätze.**

Kapitel II. **Fundamentalkonstruktionen.**

Kapitel III. **Bestimmung einer Figur aus n Projektionen derselben.**

Einleitung.

Natur und Zweck der darstellenden Geometrie.

Die Lösung aller Aufgaben der ebenen Geometrie läßt sich praktisch ausführen, wenn man folgende Aufgaben lösen kann: 1. Zwei gegebene Punkte durch eine Gerade zu verbinden, 2. Den Schnittpunkt zweier Geraden zu finden, 3. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt und Radius gegeben ist. Gehen wir jedoch zur Geometrie des Raumes über, so treten noch folgende vier Aufgaben hinzu: 1. Durch drei gegebene Punkte (oder einen Punkt und eine Gerade) eine Ebene zu legen, 2. Den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene zu finden, 3. Die Schnittlinie zweier Ebenen zu finden, 4. Eine Kugel zu beschreiben, deren Mittelpunkt und Radius bekannt ist.

Während sich nun jene drei Aufgaben in Wirklichkeit ausführen lassen, wenn man Bleistift, Lineal und Zirkel zur Verfügung hat, ist dies für die letzteren vier unmöglich, da es kein Mittel gibt, die Lage eines Punktes im Raume zeichnerisch festzulegen, oder in Wirklichkeit eine Ebene oder Kugelfläche im Raume zu zeichnen. Mit einem Worte: In der Ebene kann man zeichnen, nicht aber im Raume. Es besteht daher ein wesentlicher Unterschied zwischen den Lösungen planimetrischer und stereometrischer Aufgaben, der darin liegt, daß erstere in Wirklichkeit ausführbar sind, während letztere einen ausschließlich theoretischen Charakter haben. Da aber andererseits die Bedürfnisse der angewandten Wissenschaften verlangen, daß auch die Aufgaben der Raumgeometrie wirklich ausgeführt werden, so hat man im Laufe der Zeit nach Hilfsmitteln gesucht und auch gefunden um diesen Zweck zu erreichen: Die darstellende (oder deskriptive) Geometrie ist eben die Wissenschaft, die derartige Verfahren methodisch zusammenfaßt.

Diese haben als gemeinschaftliches Fundament einen Begriff, der sich unter verschiedenen Gestalten in allen Zweigen der heutigen Mathematik vorfindet und der insbesondere den Kern der projektiven Geometrie bildet: Es ist der Begriff der Korrespondenz zwischen zwei verschiedenen Figuren, oder der Darstellung (Abbildung) der einen durch die andere. In der darstellenden Geometrie

ersetzt man also jede Figur des Raumes durch eine ebene Figur, die mit der ersteren durch bestimmte und konstante Beziehungen verbunden ist, und daher imstande, jene zu ersetzen. Demzufolge wird jede stereometrische Aufgabe durch eine andere planimetrische ersetzt; ist diese gelöst, so hat man damit eine Figur erhalten, die der betreffenden Bedingung genügt; indem man nun die entsprechende im Raume auffindet, ist auch die ursprüngliche Aufgabe gelöst. Es ergibt sich hieraus: Soll die verwendete Darstellung oder Korrespondenz mit Sicherheit zu dem gewünschten Resultate führen, so ist notwendig und hinreichend, daß man ohne Zweideutigkeit von dem abzubildenden Objekte zu seinem Bilde übergehen und ebenfalls ohne Zweideutigkeit von diesem zu jenem zurückkehren könne. Diese Bedingung muß offenbar für jede, auch nicht mathematische Darstellung erfüllt sein.[1])

Das Problem, die theoretischen Lösungen stereometrischer Aufgaben praktisch auszuführen, ersetzt man also durch das andere, dreidimensionale Figuren durch entsprechende ebene Figuren darzustellen. Fassen wir unsere Bemerkungen kurz zusammen, so können wir folgende Definition geben: Die darstellende Geometrie ist die Wissenschaft, welche lehrt: 1. räumliche Figuren durch geeignete ebene Figuren darzustellen[2]), 2. mit Hilfe dieser Aufgaben zu lösen, die sich auf jene beziehen, 3. die bezüglichen Sätze aufzustellen. Damit bildet sie eine notwendige Ergänzung der gewöhnlichen Geometrie.

Bezeichnungen und Vorbemerkungen.

Um unseren Darlegungen die möglichste Klarheit zu geben, wollen wir übereinkommen, immer zu bezeichnen 1. Punkte durch große lateinische Buchstaben, 2. Geraden durch kleine lateinische Buchstaben, 3. Ebenen durch kleine griechische Buchstaben, während wir zur Bezeichnung von Kurven und Flächen deutsche Buchstaben oder andere Schriftarten gebrauchen wollen. Wir wählen die ersten Buchstaben des Alphabets, um gegebene oder bekannte Stücke zu bezeichnen, die letzten für unbekannte bzw. gesuchte. Mit AB bezeichnen wir die Gerade, welche die beiden Punkte A und B verbindet, mit ab den Schnittpunkt der Geraden a und b, mit $a\alpha$ den der Geraden a mit der Ebene α; ferner mit $\alpha\beta$ die den beiden Ebenen

1) Als Beispiel möge der sprachliche Ausdruck dienen, der ja nichts anderes ist, als eine Art der Darstellung oder Korrespondenz zwischen den Worten und den Begriffen. Leider entspricht keine der existierenden Sprachen völlig der oben ausgesprochenen Bedingung!

2) Gewiß könnte man auch zweidimensionale nicht-ebene Figuren als darzustellende wählen, aber vom praktischen Standpunkte sind solche Darstellungen wenig nützlich.

α und β gemeinsame Gerade; $\overline{AB}$ hingegen bezeichne die durch die Punkte A und B begrenzte Strecke. $\sphericalangle ab$ bzw. $\sphericalangle \alpha\beta$ bezeichne einen der von den Geraden a und b bzw. den Ebenen α und β gebildeten Winkel.

Um den Figuren eine größere Deutlichkeit zu geben, wollen wir alle gegebenen und gesuchten Linien kräftig zeichnen und voll ausziehen, sofern sie als sichtbar anzusehen sind, dagegen gestrichelt, wenn sie nicht sichtbar sind. Die Konstruktions- und Hilfslinien ziehen wir fein aus, entweder voll oder gestrichelt, oder wir zeichnen sie punktiert.

Um bei den Zeichnungen eine möglichst große Genauigkeit zu erzielen, beachte man: Eine Gerade ist um so schärfer bestimmt, je weiter die beiden sie bestimmenden Punkte auseinander liegen, ein Punkt, je mehr der Winkel, den die beiden Linien, deren Schnitt er ist, miteinander bilden, sich einem Rechten nähert.

Über die Werkzeuge des Geometers.

Seit den Zeiten des Euklid sind die dem Geometer zugestandenen Instrumente das Lineal und der Zirkel (später fügte man noch das Winkelscheit und das Parallelenlineal hinzu). Diese Instrumente sind sehr verschiedener Natur; während es nämlich sehr leicht ist, über einen guten Zirkel zu verfügen, und daher eine Linie zu zeichnen, die einem idealen Kreise sehr nahe kommt, ist es ziemlich schwer, ein Lineal zu bekommen, das wirklich vollständig geradlinig ist, und auch wenn man es hätte, so würde es doch nicht leicht gelingen, mit diesem eine Linie zu ziehen, die einer wirklichen Geraden vergleichbar wäre. Daher ist die praktische Lösung eines geometrischen Problems um so genauer, je mehr bei ihr der Gebrauch des Zirkels den des Lineals überwiegt. Diese Bemerkung läßt die Frage auftauchen, ob es nicht möglich sei, das Lineal vollständig zu vermeiden, indem man sich bei der Ausführung aller Konstruktionen ausschließlich des Zirkels bedient? Diese Frage ist im bejahenden Sinne beantwortet, indem gegen Ende des 18. Jahrhunderts Lorenzo Mascheroni (1750—1800) jene Disziplin schuf, die nach seinem Vorschlage als Geometrie des Zirkels benannt wurde[1]) und deren allererste Grundzüge wir nunmehr darlegen wollen.

Begriff und Grundaufgaben der Geometrie des Zirkels.

Bei der Methode Mascheronis ist das einzig gestattete Instrument der Zirkel, und jede Gerade muß man sich als durch zwei ihrer Punkte dargestellt denken. (Wenn wir trotzdem in den folgen-

1) *Geometria del compasso,* Pavia 1797. Neue Ausgabe, Palermo 1902. Deutsch von Grüson, Berlin 1825.

den Figuren Geraden ziehen oder punktiert darstellen, so geschieht dies nur der Deutlichkeit halber.) Wir bemerken alsbald, daß man dann leicht unzählige weitere Punkte der Geraden auffinden kann. Sind nämlich A und B die beiden Punkte, durch welche die Gerade bestimmt wird, so nehmen wir diese als Mittelpunkte zweier gleich großer Kreise, die sich in M und N schneiden. Beschreiben wir dann um M und N wiederum zwei Kreise mit demselben, aber hinlänglich großen Radius r, so schneiden sich diese in zwei Punkten C, D, die offenbar der Geraden AB angehören. Durch Variation von r bekommen wir so unzählig viele Punktepaare der Geraden.

Bei allen geometrischen Konstruktionen treten als nicht weiter zurückführbare **Grundaufgaben** folgende auf: **I.** Die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreise zu bestimmen, **II.** Den zwei Geraden gemeinsamen Punkt zu finden, **III.** Die Schnittpunkte zweier Kreise zu bestimmen. Die letztere ist durch bloße Anwendung des Zirkels sofort gelöst; um die beiden anderen lösen zu können, müssen wir einige unumgängliche V o r a u f g a b e n erledigen:

1. Zu einer Geraden AB durch einen Punkt C die Parallele zu ziehen. Es genügt von der gesuchten Parallelen einen zweiten Punkt zu kennen. Wir beschreiben um B mit AC, um C mit AB zwei Kreise; diese schneiden sich in D (und E); dann ist CD die gesuchte Parallele (während AE parallel CB ist).

2. Eine Strecke AB zu verdoppeln, verdreifachen usw. Man beschreibe um B mit BA einen Kreis, darauf mit demselben Radius um A einen Kreis, der den ersteren in M schneidet; dann um M mit demselben Radius wieder einen Kreis, der den ersten in N schneidet, dann um N einen gleichen Kreis, der in C schneidet, BC ist dann gleich AB, folglich $AC = 2AB$, usw.

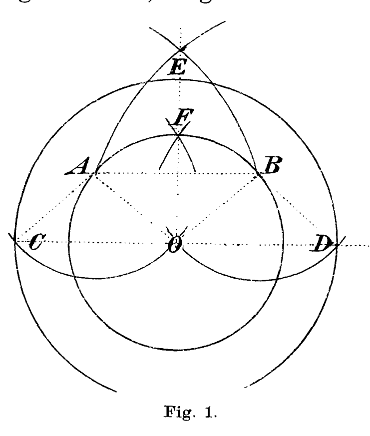


Fig. 1.

3. Den zu einem gegebenen Punkte P in bezug auf eine Gerade AB symmetrischen Punkt P' zu finden. Auflösung: Die Kreise mit den Mittelpunkten A und B, die durch P gehen, schneiden sich zum zweiten Male in dem gesuchten Punkte P'.

4. Einen gegebenen Kreisbogen AB zu halbieren (Fig. 1). Ist O der Mittelpunkt des zugehörigen Kreises, so beschreibe man einen Kreis um O mit $\overline{AB}$ als Radius und bestimme seine Schnittpunkte C und D mit den beiden Kreisen, die um A und B mit OA beschrieben sind (und die sich überdies noch in O schneiden), dann sind die beiden Figuren $ABOC$ und $ABOD$ Parallelogramme, und

folglich liegen die Punkte C, D, O in gerader Linie. Um C und D beschreiben wir nun mit den beiden gleichen Radien $\overline{CB}$ und $\overline{DA}$ Kreise, die sich in E schneiden. Dann beschreiben wir noch um C und D Kreise mit dem Radius $\overline{OE}$; diese schneiden sich in F, dem gesuchten Punkte. Beweis: Daß F gleichweit von A und B entfernt ist, leuchtet sogleich ein; es ist nur noch zu zeigen, daß F auf der Peripherie des gegebenen Kreises liegt. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir den $\sphericalangle AOB$ mit 2α, dann ist $\overline{AB} = 2\,\overline{OA} \cdot \sin\alpha$, und da $\sphericalangle BOC = 90^0 + \alpha$, so ergibt das Dreieck BCO:

$$\overline{BC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + 2\,\overline{OB} \cdot \overline{OC} \cdot \sin\alpha,$$

oder

$$\overline{BC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 + 2\,\overline{OA} \cdot \overline{AB} \cdot \sin\alpha,$$

oder wegen des obigen

$$\overline{BC}^2 = \overline{OA}^2 + 2\,\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + 2\,\overline{OC}^2.$$

Nun ist aber

$$\overline{BC}^2 = \overline{CE}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OE}^2,$$

daher

$$\overline{OA}^2 + 2\,\overline{OC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OE}^2,$$

folglich

$$\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OE}^2 = \overline{CF}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OF}^2.$$

Daher ist

$$OA = OF, \qquad \text{q. e. d.}$$

5. Zu drei Strecken m, n, p die vierte Proportionale zu finden (Fig. 2). Um den beliebigen Punkt O beschreiben wir mit m und n die beiden konzentrischen Kreise und tragen in dem größeren die Strecke p als Sehne AB ab, dann beschreiben wir mit beliebigen aber gleichen Radien um A und B Kreise, die den kleineren der beiden Kreise in X bzw. Y treffen, XY ist die gesuchte Strecke. Beweis: Zufolge der Konstruktion ist Dreieck OAX kongruent OBY, folglich $\sphericalangle AOX = BOY$, daher auch $\sphericalangle AOB = XOY$. Daher sind die beiden gleichschenkeligen Dreiecke AOB und XOY ähnlich, also

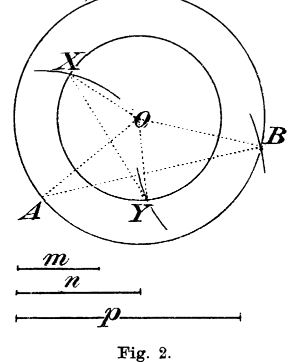


Fig. 2.

$$OA : OX = AB : XY,$$

oder

$$m : n = p : XY, \qquad \text{q. e. d}$$

Anmerkung: Damit die Konstruktion ausführbar sei, muß $\overline{AB} < 2\,\overline{OA}$ oder $p < 2m$ sein; die letzte Gleichung kann auch geschrieben werden als

$$\varrho m : \varrho n = p : XY,$$

wo ϱ eine beliebige ganze Zahl ist, und man erkennt, daß ϱ immer so gewählt werden kann, daß $p < 2\varrho m$, alsdann kann die obige Konstruktion mit ϱm, ϱn (vgl. 2) und p ausgeführt werden.

6. Den Mittelpunkt X einer Strecke $\overline{AB}$ zu finden. Man konstruiere nach Aufgabe 2 die doppelt so große Strecke AC und nach 5 die Strecke x, so daß $\overline{AB} : \overline{AC} = x : \overline{AB}$; der um A mit x beschriebene Kreis schneidet $\overline{AB}$ in dem gesuchten Punkte.

Jetzt haben wir das notwendige Material, um die beiden *Grundaufgaben* zu lösen:

I. Die Schnitte eines Kreises, dessen Radius r und dessen Zentrum O ist, mit der Geraden AB zu finden. Wenn AB nicht durch O geht, so suche man nach Voraufgabe 3 den zu O symmetrischen Punkt O' in bezug auf AB; der Kreis um O' mit r beschrieben schneidet den gegebenen in den gesuchten Punkten X und Y. Liegen aber A, O, B in einer Geraden, so beschreibe man um A einen Kreis, der den gegebenen in C und D schneidet; die Punkte X und Y sind dann die nach Voraufgabe 4 aufzusuchenden Mittelpunkte der beiden Bogen CD.

II. Den Schnitt zweier Geraden AB und CD zu finden. Auflösung: Man bestimme die zu C und D in bezug auf AB symmetrischen Punkte C' und D' (Fig. 3) nach Voraufgabe 3; der gesuchte Punkt X gehört dann auch der Geraden $C'D'$ an. Wir ergänzen nun das Parallelogramm $DD'C'E$ (Aufg. 1) und betrachten die beiden ähnlichen Dreiecke CXC' und CDE; es ergibt sich dann

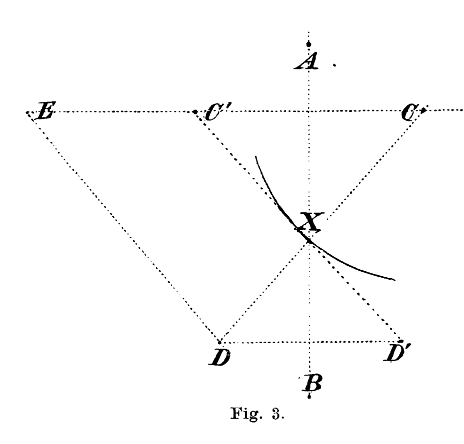


Fig. 3.

$$CE : CC' = CX : CD;$$

also kann man CX nach Aufg. 5 konstruieren. Der mit CX um C beschriebene Kreis wird CD in dem gesuchten Punkte schneiden. — Diese Konstruktion wird unbrauchbar, wenn AB und CD aufeinander senkrecht stehen. In diesem Falle suche man zunächst den zu C in bezug auf AB symmetrischen Punkt C' auf; dann wird der gesuchte Punkt der Mittelpunkt der Strecke CC', den man nach Aufg. 6 finden kann.

Indem man nun die oben dargelegten Konstruktionen in geeigneter Weise kombiniert, gelangt man zur Lösung jeder beliebigen geometrischen Aufgabe mit alleiniger Benutzung des Zirkels. Dem Leser, der ausführlichere Auskünfte auf diesem Gebiete sucht, em-

pfehlen wir das Werk Mascheronis und die Abhandlungen seiner Nachfolger.

Maßstab für die Einfachheit einer Konstruktion.

Zur Ergänzung der vorhergehenden Entwicklungen sei bemerkt, daß J. Steiner (1796—1863) im Jahre 1833 die Bemerkung machte, „es sei nötig, zu untersuchen, auf welche Weise jede geometrische Aufgabe am einfachsten, genauesten oder sichersten konstruiert werden könne"[1]), ohne jedoch anzugeben, auf welche Weise man die Einfachheit oder Genauigkeit einer geometrischen Konstruktion abwägen könne. Ein praktisches System, um dies zu können, wurde zuerst von Chr. Wiener (1826—1896) in seinem vortrefflichen *Lehrbuche der darstellenden Geometrie* (Leipzig, Teubner 1884) angewendet. Die Frage wurde jedoch gründlich erst 1888 von E. Lemoine untersucht, welcher dieser Kunst, die verschiedenen Lösungen einer geometrischen Aufgabe mit Hilfe einer symbolischen Bezeichnung untereinander zu vergleichen und daraus die beste auszuwählen, den Namen Geometrographie[2]) gab. Die von Lemoine gegebene Lösung der schönen von Steiner gestellten Aufgabe, so wertvoll sie auch sein mag, ist augenscheinlich noch nicht vollkommen; in der Tat wurde sie von E. Bernès schon modifiziert, und zwar in einer Weise, der Lemoine selbst seine Zustimmung gab[3]) und der auch wir hier den Vorzug geben wollen. Nach Bernès können die Operationen, die der Zeichner praktisch auszuführen hat, indem er Lineal und Zirkel gebraucht[4]), auf folgende zurückgeführt werden, deren jede man durch ein Symbol zu bezeichnen pflegt, nämlich

Eine beliebige Gerade zu ziehen	*Op.* δ
Eine Gerade, die durch einen Punkt geht, zu ziehen	*Op.* δ_1
Eine Gerade, die durch zwei Punkte geht, zu ziehen	*Op.* δ_2
Einen beliebigen Kreis zu ziehen	*Op.* γ
Einen Kreis zu zeichnen, dessen Zentrum gegeben ist, oder auf einer gegebenen Linie liegt	*Op.* γ_1
Einen Kreis zu ziehen, der durch einen Punkt geht, und dessen Zentrum gegeben ist, oder auf einer gegebenen Geraden liegt	*Op.* γ_2
Einen Kreis zu zeichnen, dessen Mittelpunkt und Radius bekannt sind	*Op.* γ_3.

1) *Gesammelte Werke* I, S. 510.

2) Der Leser, der sich in dieses Gebiet zu vertiefen wünscht, nehme das Werk Lemoines *Géométrographie, ou l'Art des constructions géométriques* (Paris 1902). Man sehe auch J. Roensch, *Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung* (Leipzig, Teubner 1904).

3) O. a. Werk S. 18.

4) Andere muß man betrachten, falls man noch das Winkelscheit und das Parallelenlineal anwendet.

Verlangt nun irgend eine Konstruktion l Operationen δ, l_1 Operationen $\delta_1, \ldots, m_3$ Operationen γ_3, so bezeichnet man dies durch das Symbol

$$Op. (l\delta + l_1\delta_1 + l_2\delta_2 + m\gamma + m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + m_3\gamma_3)$$

wobei es gestattet ist, die Ausdrücke mit dem Koeffizienten 0 zu unterdrücken. Die Größe

$$l + 2l_1 + 3l_2 + m + 2m_1 + 3m_2 + 4m_3$$

nimmt man als Maß für die Einfachheit der Konstruktion, während die Zahl

$$l_1 + 2l_2 + m_1 + 2m_2 + 3m_3$$

das Maß für ihre Genauigkeit abgibt. Die Zahl der in der Konstruktion auftretenden Geraden wird durch $l + l_1 + l_2$, die der auftretenden Kreise durch $m + m_1 + m_2 + m_3$ angegeben. Damit hat man ein Kriterium, die verschiedenen Lösungen einer und derselben Aufgabe von mehreren Gesichtspunkten aus zu vergleichen.

Um an einem Beispiele zu zeigen, wie sich die Auffindung des Symboles einer geometrischen Konstruktion vollzieht, diene die elementare Aufgabe: Den Mittelpunkt eines vollständig gezeichneten Kreises zu finden. Wir beschreiben drei Kreise mit beliebigen aber gleichen Radien, deren Mittelpunkte auf der Kreislinie liegen — dies sind drei Operationen γ_1 —, dann ziehen wir zwei von den je zwei Kreisen gemeinsamen Sehnen — dies sind zwei Operationen δ_2 —, diese schneiden sich in dem gesuchten Punkte O. Das gewünschte Symbol ist daher

$$Op. (2\delta_2 + 3\gamma_1);$$

als Maß für die Einfachheit gilt die Zahl $3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$, für die Genauigkeit $2 \cdot 2 + 3 = 7$.

Dem Leser, der sich mit dieser Methode näher vertraut machen will, empfehlen wir, die analogen Symbole nicht nur für die bekannteren Konstruktionsaufgaben der elementaren Geometrie aufzusuchen, sondern auch für die der darstellenden Geometrie, wie sie im folgenden zu finden sein werden.

Erster Teil.

Die Darstellungsmethoden.

Erstes Buch.

Die Methode der doppelten Orthogonalprojektion. (Mongesche Methode.)

Erstes Kapitel.

Bemerkungen über die Orthogonalprojektionen.

1. Wir nehmen uns beliebig eine Ebene π als Projektionsebene; zu jedem Punkte P kann man dann seine Orthogonalprojektion, oder das Lotbild, P' betrachten[1]. Durchläuft P eine Gerade g, so beschreibt P' eine Gerade g', welche die Schnittlinie von π mit der durch g zu ihr senkrechten Ebene ist. Zueinander parallele (und zu π nicht rechtwinklige) Geraden projizieren sich wieder in einander parallele Geraden, da ja die sie projizierenden Ebenen parallel sind. Ein unendlich ferner Punkt oder eine unendlich ferne Gerade haben auch als Projektionen unendlich ferne Elemente; eine Ausnahme machen die unendlich fernen Punkte der zu π senkrechten Geraden, sowie die unendlich fernen Geraden der zu π senkrechten Ebenen. Daher entspricht einer geschlossenen Figur im allgemeinen wieder eine geschlossene Figur und umgekehrt.

Übungssatz: Die Lotbilder zweier konjugierter Durchmesser eines Kegelschnittes sind wiederum zwei konjugierte Durchmesser der Projektion jenes, wenn die Projektionsebene immer dieselbe bleibt.

2. Zwischen einer Strecke, einem Winkel oder einer beliebigen ebenen Fläche und ihren Orthogonal-Projektionen bestehen einfache

1) Um P' praktisch zu konstruieren, nehmen wir in π beliebig die Punkte A, B und C an und beschreiben um diese mit den Radien AP, BP, CP bzw. Kreise, die je zweien von ihnen gemeinsamen Sehnen schneiden sich offenbar in P'. (De Tilly, *Sur une lacune qui semble exister au début de l'enseignement de la géométrie déscriptive.* Mathésis B. V, 1885, Supplem.)



Beziehungen, die wegen ihrer häufigen Anwendungen von großer Wichtigkeit sind.

I. Wir betrachten eine Strecke $\overline{AB}$ und ihre Orthogonal-Projektion $\overline{A'B'}$ auf π (Figur 4). AB und $A'B'$ schneiden sich in einem Punkte C und bilden einen (spitzen) Winkel φ, nämlich den Neigungswinkel der Geraden g, der die Strecke $\overline{AB}$ angehört, mit π. Ziehen wir durch A die Parallele AH zu $A'B'$, so liefert uns das Dreieck ABH:

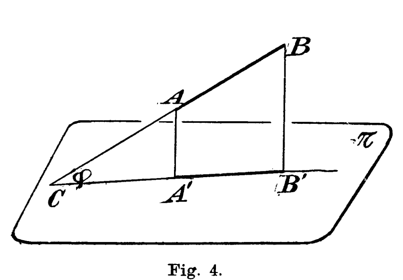


Fig. 4.

$$\overline{AH} = \overline{AB} \cdot \cos \overline{BAH}.$$

Da nun $\overline{AH} = \overline{A'B'}$, $\sphericalangle BAH = \varphi$, so kann man schreiben

$$\boldsymbol{\overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \cos \varphi}.$$

In Worten: **Die Länge der Orthogonalprojektion einer Strecke ist gleich der Länge der ursprünglichen Strecke multipliziert mit dem Kosinus des Neigungswinkels der Geraden, auf welcher die Strecke liegt, gegen die Projektionsebene.** Nur in dem Falle, daß AB parallel zu π ist, also $\varphi = 0$, ist $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, in allen anderen Fällen ist $\overline{A'B'} < \overline{AB}$.

II. Es sei σ eine beliebige Ebene im Raume und g eine beliebige Gerade in σ, g' sei deren Orthogonalprojektion auf π, A' die eines beliebigen Punktes A von g. Ziehen wir nun (Fig. 5) AH senkrecht zur Geraden $\sigma\pi$, so ist auch $A'H$ senkrecht dazu, daher ist AHA' der Neigungswinkel ε der beiden Ebenen. Ist nun T der Schnittpunkt der beiden Geraden g und g', so ist der Winkel $TA'H = \varphi'$ die Projektion des Winkels $TAH = \varphi$. Da nun die beiden Dreiecke ATH und $A'TH$ beide rechtwinklig bei H sind, so ist

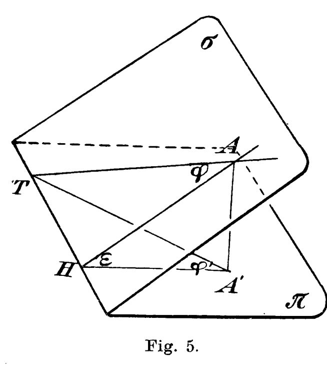


Fig. 5.

$$\frac{\overline{TH}}{\overline{AH}} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{\overline{TH}}{\overline{A'H}} = \operatorname{tg} \varphi',$$

folglich

$$\frac{\overline{A'H}}{\overline{AH}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi'}.$$

Ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreiecke $AA'H$:

$$\overline{A'H} = \overline{AH} \cdot \cos \varepsilon;$$

folglich

$$\operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} \varphi \cdot \sec \varepsilon.$$

Da nun diese Beziehung zwischen einem Winkel, dessen einer Schenkel senkrecht zur Schnittlinie seiner Ebene mit der Projektionsebene ist, und seiner Projektion besteht, so könnte man daraus eine analoge Beziehung für einen beliebigen Winkel ableiten; jedoch ist das entstehende Resultat nicht einfach genug, um besonderen Nutzen zu bringen. Wir beschränken uns daher auf die Bemerkung, daß aus der obigen Beziehung folgt, daß, da $\sec \varepsilon > 1$ im allgemeinen $\varphi' > \varphi$, mit anderen Worten: **Die Orthogonalprojektion eines spitzen Winkels ist größer als der Winkel selbst.** Eine Ausnahme machen nur die Fälle $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$, wo $\varphi' = \varphi$. Sehen wir von dem ersteren Falle ab, der ohne Interesse ist, und beschränken uns auf den zweiten Fall; dann ist g parallel zu $\sigma\pi$ und wir erhalten den Satz: **Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Projektion eines rechten Winkels wiederum ein Rechter sei, ist die, daß ein Schenkel desselben der Projektionsebene parallel ist.**[1])

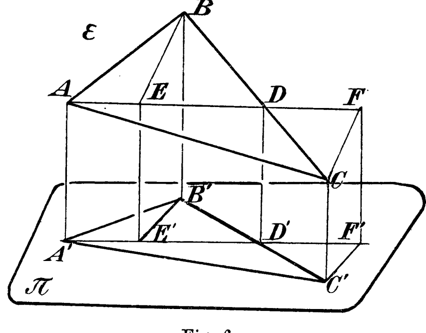


Fig. 6.

III. Es sei ABC (Fig. 6) ein beliebiges in einer Ebene ϵ gelegenes Dreieck. $A'B'C'$ sei seine Projektion auf die Ebene π. Die durch A zu π parallel gelegte Ebene π' schneide BC in D, dann ist AD die Schnittlinie $\epsilon\pi'$. Auf diese fällen wir von B und C die Lote BE und CF und zeichnen auch deren Projektionen $D'E'F'$. Nach dem vorigen Satze sind die Winkel $A'E'B'$ und $C'F'D'$ rechte, und vorausgesetzt, daß der Punkt D zwischen B und C fällt, so ist

$$\Delta ABC = \tfrac{1}{2}\overline{AD}(\overline{BE} + \overline{CF})$$

$$\Delta A'B'C' = \tfrac{1}{2}\overline{A'D'}(\overline{B'E'} + \overline{C'F'}).$$

Nun ist

$$\overline{A'D'} = \overline{AD},$$

$$\overline{B'E'} = \overline{BE}\cos(BE, B'E'),$$

oder

$$\overline{B'E'} = \overline{BE}\cos(\epsilon\pi).$$

Ebenso

$$\overline{C'F'} = \overline{CF}\cos(\epsilon\pi),$$

---

1) Für den Leser ist es eine nützliche Übung, diesen Satz auch durch bloße Betrachtungen aus der elementaren Geometrie zu beweisen.

also

$$\Delta A'B'C' = \Delta ABC \cdot \cos(\epsilon\pi).$$

Es ist leicht einzusehen, daß diese Beziehung auch besteht, wenn D außerhalb BC fällt. Da man nun jedes beliebige Vieleck in Dreiecke zerlegen kann, so kann der Satz zunächst auf jede geradlinig begrenzte Fläche ausgedehnt werden; desgleichen gilt er für jede beliebige ebene Figur, insofern man sie ja als Grenzfall eines Vielecks ansehen kann. Wir haben somit den Satz: **Die Orthogonalprojektion einer jeden ebenen Fläche ist an Inhalt gleich der ursprünglichen Fläche multipliziert mit dem Kosinus des Winkels, den die Ebene dieser Fläche mit der Projektionsebene bildet.**

Übungssatz: Die Ellipse mit den Halbachsen a und b hat den Inhalt $\pi a b$.

Bemerkung. Anstatt senkrecht auf die Ebene π zu projizieren, kann man einen Punkt des Raumes auch in einer *beliebigen festen Richtung* r schief projizieren. Auch dann besteht zwischen einer beliebigen Strecke $\overline{AB}$ und ihrer Projektion $\overline{A'B'}$ eine ziemlich einfache Beziehung, die sich auf folgende Weise ergibt: Zieht man (Fig. 7) AH parallel zu $A'B'$, so hat man

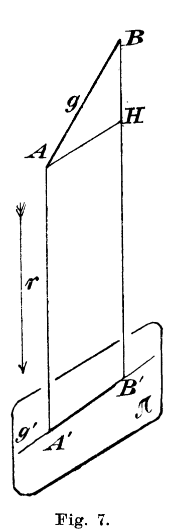


Fig. 7.

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{\sin \widehat{ABH}}{\sin \widehat{AHB}}.$$

Nun ist $AH = A'B'$ und der spitze Winkel ABH ist der von der Geraden $AB \equiv g$ mit der Richtung r gebildete, und schließlich ist AHB der Nebenwinkel des von BH mit seiner eigenen schrägen Projektion gebildeten Winkels, d. i. der Winkel zwischen r und g'; daraus folgt

$$A'B' = AB \cdot \frac{\sin(gr)}{\sin(g'r)}.$$

Dies ist die gesuchte Beziehung, die eine Verallgemeinerung der für die Orthogonalprojektion aufgestellten ist; sie fällt mit dieser zusammen, wenn

$$\sphericalangle g'r = \frac{\pi}{2}.$$

Zweites Kapitel.

Allgemeines über die Mongesche Methode. Darstellung des Punktes.

3. Bei der Orthogonalprojektion entspricht jedem Punkte P des Raumes ein bestimmter Punkt P' der festen Ebene π; umgekehrt jedoch entsprechen jedem Punkte P' von π alle die unzählig vielen

Punkte der in P' zu π errichteten senkrechten Geraden. Demnach würde, gemäß den Bemerkungen in der Einleitung (S. 2), die Orthogonalprojektion *nicht* eine Methode sein, die für die Zwecke der darstellenden Geometrie angewendet werden könnte. Dennoch bildet sie die Grundlage einer solchen Methode.

Wir betrachten nämlich zwei zueinander senkrechte Ebenen, π_1 und π_2, und wollen alle Punkte des Raumes auf diese beiden Ebenen projizieren. Wir nennen diese Ebenen bzw. die erste und die zweite Projektionsebene, oder auch π_1 die Grundriß-, π_2 die Aufrißebene. Indem man nun den Ebenen im Raume eine solche Lage gibt, wie sie bei den Anwendungen in der Architektur üblich ist, kann man auch die erstere die Horizontal-, und die zweite die Vertikalebene nennen (Fig. 8). Ihre Schnittlinie $a_{12} = a_{21}$ heißt die Projektionsachse oder einfach die Achse, zuweilen auch Grundlinie; sie teilt jede der beiden Ebenen in ein „positives“ und „negatives“ Gebiet, und wir wollen diese Halbebenen bzw. mit π_1^+, π_1^-, π_2^+, π_2^- bezeichnen. Durch die beiden Ebenen wird der ganze Raum in vier Teile geteilt, die wir mit den Ziffern I, II, III, IV bezeichnen, derart, daß I zwischen π_1^+ und π_2^+ liegt, II zwischen π_2^+ und π_1^-, usw.[1])

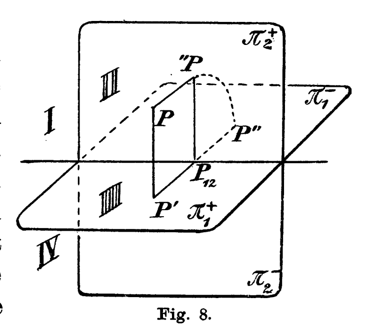


Fig. 8.

4. Es sei P ein beliebiger Punkt des Raumes, P' und $''P$ seine Orthogonalprojektionen auf π_1 und π_2, die wir auch als erste und zweite Projektion, bzw. Grundriß und Aufriß bezeichnen wollen. Durch die beiden Geraden PP' und $P''P$ wird eine Ebene bestimmt, die senkrecht zur Achse steht; die Figur $PP'P_{12}''P$ ist offenbar ein Rechteck und die beiden Geraden $P_{12}P'$ und $P_{12}''P$ stehen beide senkrecht (im selben Punkte P_{12}) auf der Grundlinie. Nehmen wir umgekehrt auf π_1 und π_2 zwei Punkte P' und $''P$, derart, daß die von ihnen auf die Achse gefällten Lote sich in einem Punkte P_{12} treffen, so kann man $P'P_{12}$ als die Ecken eines Rechtecks auffassen, dessen vierte Ecke der Punkt P ist, und dann sind offenbar P' und $''P$ die Orthogonalprojektionen von P auf π_1 und π_2. **Folglich gibt es eine eindeutige Beziehung zwischen den Punkten des Raumes und denjenigen Punktepaaren der beiden zueinander senkrechten Bildebenen, bei denen die von ihnen auf die Achse gefällten Lote sich in einem Punkte treffen.** Damit ist also ein gesetzmäßiges Verfahren gefunden, dreidimensionale Figuren durch ebene Figuren *darzustellen;* wir

---

1) Vgl. diese Benennung mit der in der Trigonometrie üblichen Bezeichnung der vier Quadranten.

nennen es die *Methode der doppelten Orthogonalprojektion* oder kürzer die *Mongesche Methode* zum Andenken an den großen Mathematiker, der sie in die reine Wissenschaft eingeführt hat. Sie hat noch einen Übelstand, nämlich, daß sie zwei verschiedene Bild- bzw. Zeichenebenen verlangt. Um diesen zu beseitigen, denken wir uns die eine der beiden Ebenen um die Achse um 90^0 gedreht, so daß das positive Gebiet der einen über das negative der anderen fällt[1]); läßt man z. B. π_2 sich drehen[2]), so beschreibt $''P$ (Fig. 8) einen Viertelkreis und kommt dann auf einen Punkt P'' der Geraden $P'P_{12}$ zu liegen, so daß $\overline{P_{12}P''} = \overline{P_{12}''P}$ wird. Bei dieser Anordnung **entsprechen jedem Punkte P des Raumes zwei auf einer Senkrechten zur Grundlinie gelegene Punkte P' und P'' der Zeichenebene.** Umgekehrt **entspricht offenbar zwei solchen Punkten P' und P'' ein einziger Punkt P des Raumes.**

Durch die Schreibweise $P \equiv (P', P'')$ soll ausgedrückt werden, daß P der durch P' und P'' dargestellte (abgebildete) Punkt sei, wobei immer vorausgesetzt wird, daß diese beiden Punkte auf derselben „Ordinate“ liegen, womit wir kurz eine Senkrechte zur Achse bezeichnen wollen[3]). Allgemein soll durch $\mathfrak{F} \equiv (\mathfrak{F}', \mathfrak{F}'')$ ausgedrückt werden, daß die aus mehreren Punkten gebildete Figur $\mathfrak{F}$ die entsprechenden Figuren $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ zu Orthogonalprojektionen hat.

5. Die Zeichenebene wird durch die Achse in zwei Gebiete geteilt; in das eine fallen die Punkte von π_1^+ und π_2^-, in das andere die von π_1^- und π_2^+. Um beide Gebiete auseinander zu halten, wollen wir uns die Grundlinie in einem bestimmten Sinne durchlaufen denken (den wir durch einen Pfeil andeuten) und übereinkommen, daß ein Beobachter, der sich längs derselben ausgestreckt hat, so daß die Richtung Füße-Kopf mit der Pfeilrichtung zusammenfällt, das erste dieser Gebiete zur Linken, das andere zur Rechten hat (Fig. 9). In Fällen, wo dies keine Zweideutigkeit hervorruft, werden wir jedoch einfach davon absehen, den positiven Sinn der Grundlinie besonders zu bezeichnen.

π_1^- π_2^+ / π_1^+ π_2^-

Fig. 9.

1) Diese Operation ist notwendig, um auf einem einzigen Blatte zeichnen zu können; will man sich aber genaue Rechenschaft über die ausgeführten Konstruktionen geben, so hat man sich immer wieder die Ebenen π_1 und π_2 in ihrer ursprünglichen Lage zu denken.

2) Die Drehung der vertikal zu denkenden Ebene π_2 ist notwendig, wenn es sich um einen gewöhnlichen Zeichner handelt; wenn aber der unterrichtende Lehrer sich einer senkrecht hängenden Wandtafel bedient, so muß man sich die horizontal zu denkende Ebene π_1 um die Grundlinie gedreht denken.

3) Alle Ordinaten gehen durch ein und denselben unendlich fernen Punkt, den man das Zenith der Grundlinie nennt.

Eine einfache Betrachtung der Fig. 8 und 9 zeigt uns nun folgendes:

Ein Punkt des Raumgebietes I hat die erste Projektion in π_1^+, die zweite in π_2^+,
„ „ „ „ II „ „ „ „ „ π_1^-, „ „ „ π_2^+,
„ „ „ „ III „ „ „ „ „ π_1^-, „ „ „ π_2^-,
„ „ „ „ IV „ „ „ „ „ π_1^+, „ „ „ π_2^-.

Werden nun die beiden Ebenen π_1 und π_2 aufeinander gelegt, so ergibt sich:

Gehört ein Punkt P dem

Raumgebiete I an, so fällt P' in das 1te, P'' in das 2te Gebiet der Zeichenebene
„ II „ „ fallen P' und P'' in das 2te „ „ „
„ III „ „ fällt P' in das 2te, P'' in das 1te „ „ „
„ IV „ „ fallen P' und P'' in das 1te „ „ „

Da diese Sätze offenbar umgekehrt werden können, so ermöglichen sie in jedem einzelnen Falle die Bestimmung, in welchem Gebiete des Raumes sich ein Punkt, der durch seine beiden Projektionen gegeben ist, befindet.

Liegt ein Punkt P auf π_1 (oder π_2), so fällt die eine Projektion P' (oder P'') mit ihm zusammen, während die andere P'' (oder P') auf die Achse fällt; ein Punkt der Achse selbst fällt mit seinen beiden Projektionen zusammen.

Zur Übung: Den Schwerpunkt einer Strecke, eines Dreiecks oder eines Tetraëders zu finden, das durch die Projektionen seiner Ecken gegeben ist.

6. Wir nehmen eine beliebige Maßeinheit und nennen die darin gemessenen Abstände des Punktes P von den beiden Projektionsebenen die erste und zweite, oder auch Horizontal- und Vertikal-Kote des Punktes; wir geben dieser ein Vorzeichen, und zwar wollen wir festlegen, daß ein Punkt des I Raumgebietes beide Koten positiv haben soll, des II die Horizontalkote positiv, die andere negativ, des III beide negativ, und des IV die Horizontalkote negativ, die andere positiv. Dann sieht man (vgl. Fig. 8), daß die absoluten Werte der Horizontal- bzw. Vertikal-Koten eines Punktes nichts anderes sind, als die Maßzahlen der Abstände der Grundlinie von der vertikalen bzw. horizontalen Projektion. Die Vorzeichen ergeben sich dann leicht, weil, wenn man die Projektionen eines Punktes kennt (vgl. oben), man auch weiß, in welchem Raumgebiete sich der Punkt befindet. Die Punkte der horizontalen (bzw. vertikalen) Ebene, und nur diese, haben die Horizontal- (bzw. Vertikal-) Kote Null, die der Grundlinie (und nur diese) haben beide Koten gleich Null.

Die beiden Projektionsebenen π_1 und π_2 bestimmen vier rechtwinklige Zweiflache; je zwei davon sind Scheitelflache und haben die Halbierungsebene gemeinsam. Erste Halbierungsebene wollen wir

die nennen, welche durch die Gebiete I und III geht, zweite Halbierungsebene, die durch II und IV geht. Gehört ein Punkt P der ersten an, (vgl. Fig. 8) so haben P' und $''P$ gleichen Abstand von P_{12} und es fällt der eine in π_1^+ der andere in π_2^+, oder der eine in π_1^-, der andere in π_2^- und umgekehrt. Gehört dagegen P der zweiten Halbierungsebene an, so haben P' und $''P$ ebenfalls gleichen Abstand von P_{12}, aber der eine liegt in π_1^-, der andere in π_2^+, oder der eine in π_1^+ und der andere in π_2^-. Wird nun die eine Bildebene auf die andere geklappt, so liegen im ersten Falle P' und P'' symmetrisch zu a_{12}, während im zweiten Falle P'' mit P' zusammenfällt. Hieraus ergibt sich: **Jeder Punkt der ersten Halbierungsebene hat zu Projektionen zwei zur Achse symmetrische Punkte; jeder der zweiten zwei zusammenfallende Punkte, und umgekehrt.**

Drittes Kapitel.

Darstellung der Geraden. Spurpunkte derselben.

7. Durchläuft ein Punkt P eine Gerade g, so durchlaufen seine Projektionen P' und $''P$ zwei Gerade g' und $''g$, welche die Projektionen von g sind. Wird nun die Ebene π_2 in die π_1 niedergeklappt, so nimmt die letztere Projektion ihre neue Lage g'' an. Einer beliebigen Geraden des Raumes entsprechen so zwei bestimmte Gerade g' und g'' der Zeichenebene. Hieraus ergibt sich nun sogleich folgendes:

1. Trifft g die Achse, so schneiden sich auch g' und g'' auf ihr in demselben Punkte; insbesondere wenn g parallel zur Grundlinie ist, so sind es auch g' und g''.
2. Ist g parallel zu π_1, bzw. π_2, so ist g'', bzw. g' parallel zur Grundlinie.
3. Ist g senkrecht zu π_1 bzw. π_2, so steht g'', bzw. g' senkrecht zur Grundlinie, während g' bzw. g'' sich als Punkt darstellen.
4. Liegt g in π_1 bzw. π_2, so fällt g' bzw. g'' mit g zusammen, während g'' bzw. g' auf die Achse fällt.

Nehmen wir umgekehrt in der Zeichenebene zwei beliebige Geraden g' und g'' an. Bringen wir nun die π_2 wieder in ihre alte Lage, so nimmt g'' eine andere Lage $''g$ an, und errichten wir nun die durch g' und $''g$ gehenden zu π_1 und π_2 senkrechten Ebenen, so schneiden sich diese im allgemeinen in einer eindeutig bestimmten Geraden g, die den beiden Geraden g' und g'' (in dem früher bezeichneten Sinne) entspricht. **Es besteht also eine, im allgemeinen eindeutige, Beziehung zwischen den Geraden g des Raumes und den Geradenpaaren g', g'' der Bildebene.** Wir wollen dies durch die

Schreibweise $g \equiv (g', g'')$ ausdrücken. Jede Ordinate schneidet g' und g'' in den Projektionen P', P'' eines Punktes P von g.

Zur Übung: Jede in der 1. Halbierungsebene gelegene Gerade hat zu Projektionen zwei zur Grundlinie symmetrische, jede in der 2. gelegene zwei zusammenfallende Geraden (vgl. Nr. 5).

8. Bemerkenswert sind einige Fälle, in denen jene Beziehung besondere Eigentümlichkeiten darbietet:

Nehmen wir zuerst an, daß g' senkrecht zur Grundlinie ist, während g'' sie schneidet (Fig. 10). Greifen wir auf g' einen beliebigen, im Endlichen gelegenen Punkt P' heraus, so ist die zugehörige Ordinate g' selber; P'' ist daher nichts anderes als der Schnittpunkt $g'g''$. Ist dagegen P' der unendlich ferne Punkt von g', so ist seine Ordinate eine beliebige zur Grundlinie senkrechte Gerade, also P'' ein beliebiger Punkt von g''. Demnach **entspricht allen im Endlichen gelegenen Punkten von g' der Punkt $P'' \equiv g'g''$, dem uneigentlichen Punkte von g' aber alle Punkte von g''**[1]. Da man es in der Praxis nur mit endlichen Punkten zu tun hat, so pflegt man P'' als vollständige Projektion der betrachteten Geraden anzusehen, die also senkrecht zu π_2 steht. Analoges ist zu sagen über den Fall, daß g'' senkrecht zur Achse ist, und g' sie schneidet (vgl. Nr. 7, 3.).

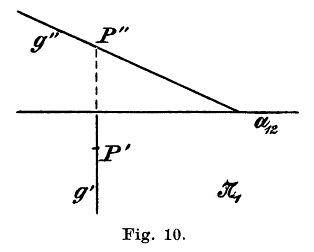


Fig. 10.

Stehen ferner g' und g'' senkrecht zur Grundlinie aber in verschiedenen Punkten, so werden die durch g' und $''g$ gelegten zu π_1 und π_2 senkrechten Ebenen parallel und g liegt im Unendlichen.

Wenn schließlich beide Geraden g' und g'' senkrecht zur Grundlinie in demselben Punkte stehen, so fallen die beiden Ebenen zusammen, und g ist unbestimmt. Die übliche Darstellungsmethode versagt also und muß durch eine andere ersetzt werden. Um in diesem Falle die Gerade zu individualisieren, nehmen wir auf ihr zwei Punkte A und B an, die wir durch ihre Projektionen A', A'' und B', B'' bestimmen, die alsdann je auf derselben Ordinate liegen müssen. Dadurch ist die Gerade eindeutig bestimmt, da zwei ihrer Punkte es sind; sie liegt in einer zur Grundlinie senkrechten Ebene, und ist also auch senkrecht zu dieser.

9. Indem die zur Grundlinie senkrechten Geraden einer von der der übrigen Geraden des Raumes verschiedenen Darstellung bedürfen, erfordern sie im allgemeinen auch besondere Lösungen der Probleme, in denen sie auftreten, wie dies folgendes Beispiel zeigen möge:

1) Diese singuläre (ausgeartete) Perspektivität zwischen zwei Punktreihen findet immer statt, wenn der Träger der einen durch das Projektionszentrum geht.

Eine Gerade $g \equiv AB$ sei senkrecht zur Grundlinie und gegeben durch die Projektionen A', A'' und B', B'' zweier ihrer Punkte; wie kann man weitere Punktepaare P', P'' konstruieren, die Punkte P der Geraden g darstellen?[1])

Zur Beantwortung dieser Frage beachten wir folgendes: Ist $g \equiv AB$ eine beliebige Gerade des Raumes, und durchläuft P diese Gerade, so beschreiben P' und P'' auf g' und g'' zwei Punktreihen, die perspektiv zu der auf dem Träger g sind und also zueinander projektiv; da ferner der unendlich ferne Punkt von g' dem unendlich fernen von g und damit auch dem von g'' entspricht, so sind diese beiden Punktreihen auch ähnlich. Die zwischen ihnen bestehende Korrespondenz ist durch die beiden Punktepaare A', A'' und B', B'' bestimmt; irgend ein anderes Punktepaar P', P'' von dieser Korrespondenz wird dann einen Punkt von g darstellen[2]).

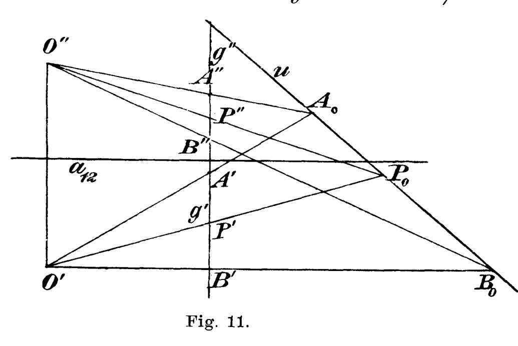


Fig. 11.

Um nun für den vorliegenden Fall ein solches Punktepaar zu konstruieren, nehmen wir ganz beliebig zwei Punkte O' und O'', die auf derselben Ordinate liegen (Fig. 11) und projizieren von ihnen aus die beiden Punktreihen auf g' und g''. Wir erhalten so zwei projektive Strahlenbüschel, die, da sie den Strahl $O'O''$ entsprechend gemein haben, perspektiv sind; die Perspektivitätsachse u ist bestimmt durch die Punkte

$$A_0 \equiv (O'A',\ O''A''), \quad B_0 \equiv (O'B',\ O''B'').$$

Nehmen wir nun auf u einen beliebigen Punkt P_0, so schneiden die Strahlen $O'P_0$ und $O''P_0$ die g' und g'' in P' und P'', die Projektionen

---

1) Vgl. den Aufsatz des Verf. *Osservazioni sopra un problema di geometria descrittiva* im Periodico di matem. per l'insegn. secondario, 3. Reihe. I. Bd. 1903 bis 04, S. 143.

2) Sind φ_1 und φ_2 die von g mit π_1 und π_2 gebildeten Winkel, so ist (vgl. Nr. 2)

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \cos\varphi_1, \quad \overline{A''B''} = \overline{AB} \cos\varphi_2,$$

daher ist

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A''B''}} = \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}$$

das Ähnlichkeitsverhältnis der beiden Punktreihen; in obigem Spezialfalle ist

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2},$$

und das Verhältnis demnach gleich $\operatorname{tg}\varphi_2$ oder $\cot\varphi_1$.

eines und desselben Punktes von g sind; lassen wir P_0 die Gerade u durchlaufen, so erhalten wir die Projektionen aller Punkte der gegebenen Geraden.

10. Aus dem, was über die Darstellung von Punkten und Geraden gesagt ist, geht hervor: **Damit ein Punkt $P \equiv (P', P'')$ einer Geraden $g \equiv (g', g'')$ angehöre, ist notwendig und hinreichend, daß P' auf g', P'' auf g'' liege.** Ist aber $g \equiv AB$ zur Achse senkrecht, so müssen außerdem P' und P'' sich in der durch die Paare $A'A''$, $B'B''$ bestimmten Ähnlichkeit entsprechen, es muß also $\frac{\overline{A'P'}}{\overline{B'P'}} = \frac{\overline{A''P''}}{\overline{B''P''}}$ sein.

Zur Übung: I. Wann trifft eine zur Achse senkrechte Gerade $g \equiv AB$ die Achse selbst? **II.** Die Bedingung anzugeben dafür, daß ein Punkt $P \equiv (P', P'')$ auf einer Senkrechten zu einer der Projektionsebenen liegt.

Wir betrachten jetzt zwei Geraden $g \equiv (g', g'')$ und $h \equiv (h', h'')$ die nicht senkrecht zur Achse laufen. **Wenn diese sich schneiden, so müssen offenbar die Punkte $g'\ h'$ und $g''\ h''$ auf derselben Ordinate liegen; wenn sie parallel sind, so müssen auch g' und h', sowie g'' und h'' einander parallel laufen. Haben zwei Geraden g, h eine Projektion gemeinsam, so schneiden sie sich,** weil sie dann ja in derselben projizierenden Ebene liegen; ist z. B. $g' \equiv h'$, so hat der Schnittpunkt $P'' \equiv g''h''$ als zweite Projektion und als erste den Schnitt von g' mit der Ordinate von P'.

Das erstere dieser Kennzeichen ist augenscheinlich nicht anwendbar, wenn die Punkte $(g'h')$ und $(g''h'')$ außerhalb des Zeichenblattes fallen. Um in diesem Falle zu erkennen, ob g und h sich schneiden, nehmen wir auf g beliebig zwei Punkte an, A und B, ebenso auf h C und D; je nachdem nun sich die Geraden AC und BD (oder AD und BC) schneiden oder nicht, tun es auch g und h. A, B, C, D kann man nun offenbar immer so wählen, daß obiges Kennzeichen anwendbar ist. Den genannten Kunstgriff kann man auch benutzen, um zu entscheiden, ob eine zur Achse senkrechte Gerade $g \equiv AB$ und eine andere h, die nicht eine solche Lage hat, sich schneiden. Man nehme auf h zwei Punkte C und D und prüfe die gegenseitige Lage der beiden Geraden AC und BD (oder AD und BC). Ähnlich kann man verfahren, wenn es sich um zwei zur Achse senkrechte Geraden $g \equiv AB$ und $h \equiv CD$ handelt; ob sie sich schneiden, hängt davon ab, ob die beiden Geraden AC und BD (oder AD und BC) sich schneiden; man sieht leicht ein (s. S. 18, Note 2), daß in diesem Falle die beiden Geraden zueinander parallel sind, wenn die Beziehung besteht:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A''B''}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{C''D''}}.$$

Zur Übung: Die Bedingung dafür anzugeben, daß zwei Gerade sich schneiden, von denen eine senkrecht zu einer der Projektionsebenen steht.

11. Von allen Punkten einer Geraden g sind vom Standpunkte der darstellenden Geometrie aus die wichtigsten ihre Schnitte mit der Projektionsebene; man nennt sie die Spurpunkte, und unterscheidet sie als Horizontal- und Vertikal-, oder ersten und zweiten Spurpunkt; wir wollen sie gewöhnlich mit S_1 und S_2 bezeichnen. **Der erste Spurpunkt ist der einzige Punkt der Geraden, der mit seiner Horizontalprojektion zusammenfällt,** daher liegt seine Vertikalprojektion auf der Achse. Analoges gilt vom zweiten Spurpunkte. Zuweilen betrachtet man auch die Schnitte der Geraden g mit den beiden Halbierungsebenen, die wir mit T und U bezeichnen wollen. Aus den Darlegungen in Nr. 6 ergibt sich, daß T dadurch charakterisiert ist, daß T' und T'' symmetrisch zur Achse liegen, während für U die Punkte U' und U'' zusammenfallen.

Aufgabe I. Die Spurpunkte einer durch ihre Projektionen g' und g'' gegebenen Geraden zu finden.

1. Fall: Die Gerade sei nicht senkrecht zur Achse. Auflösung. Der erste Spurpunkt S_1 ist der einzige Punkt von g, dessen Vertikalprojektion S_1'' auf der Achse liegt; der Punkt S_1'' liegt aber auch auf g'', er ist also der Schnittpunkt $g''a_{12}$; die in ihm errichtete Ordinate schneidet also g' in dem gesuchten Punkte S_1. Ebenso ergibt sich S_2 als Schnitt der im Punkte $g'a_{12}$ errichteten Ordinate mit der g''.

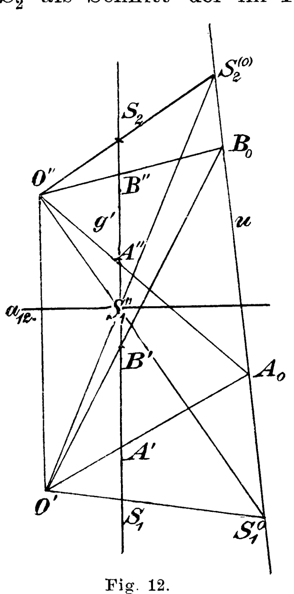


Fig. 12.

2. Fall: Die Gerade sei senkrecht zur Achse und bestimmt durch die Projektionen A', A'' und B', B'' zweier ihrer Punkte. Auflösung: Wir nehmen (vgl. Nr. 9) zwei beliebige, auf derselben Ordinate gelegene Punkte O' und O'' (Fig. 12) und bestimmen die Perspektivitätsachse u der beiden Büschel $O'(A', B'\ldots)$ und $O''(A'', B''\ldots)$. Jetzt projizieren wir den Schnittpunkt $g''a_{12} \equiv S_1''$ von O'' auf u als $S_1^{(0)}$, und diesen von O' auf g' als $S_1' \equiv S_1$; dieses ist die erste gesuchte Spur. Ähnlich konstruiert man S_2.

Aufgabe II. (Umkehrung). **Gegeben die beiden Spurpunkte S_1 und S_2 einer Geraden, ihre Projektionen zu zeichnen.** Auflösung: Wir fällen von $S_1 \equiv S_1'$ und $S_2 \equiv S_2'$ die Lote auf die Achse; es seien S_1'' und S_2' die betreffenden Fußpunkte. Die Verbindungslinie $S_1'S_2'$ liefert uns die erste Projektion g', die Linie $S_2''S_1''$ die Projektion g''. In dem Falle, daß S_1 und S_2 auf derselben Ordinate liegen, fallen auch g' und g'' mit dieser zusammen. **Jedenfalls ist aber eine Gerade durch ihre beiden Spur-**

punkte eindeutig bestimmt. Die einzige Ausnahme bildet der Fall, daß die beiden Spurpunkte auf der Achse in einen Punkt zusammenfallen; die fragliche Gerade kann dann jede durch diesen Punkt laufende sein, und um sie zu bestimmen, müßte noch ein anderer ihrer Punkte gegeben sein.

Zur Übung: I. Wo liegen die Spurpunkte einer zu einer Projektionsebene parallelen oder senkrechten Geraden? **II.** Können S_1 oder S_2 unbestimmt werden? Und wenn, in welchem Falle?

12. Aufgabe: Die Schnitte einer Geraden mit den beiden Halbierungsebenen zu bestimmen.

I. Fall. Die Gerade sei nicht senkrecht zur Achse und gegeben durch ihre beiden Projektionen g' und g''. Auflösung: Was den Schnittpunkt T mit der ersten Halbierungsebene angeht, so müssen ja T' und T'' symmetrisch zur Achse liegen. Wir bestimmen also die Spurpunkte S_1 und S_2, halbieren $S_1 S_{12}$ in M_1 und $S_2 S_{21}$ in M_2. Die Verbindungslinie $M_1 M_2$ schneidet a_{12} in T_{12}; die in T_{12} zu a_{12} errichtete Senkrechte trifft g' in T', g'' in T'' (Fig. 13). Es ist leicht zu sehen, daß S_1, S_2, T_{12} in eine Gerade fallen, eine Bemerkung, die die Bestimmung von T erleichtert. Oder einfacher: Man ziehe (durch S_1'') die zu g'' in bezug auf a_{12} symmetrische Gerade $\bar{g}''$; diese schneidet g' in T', und die zugehörige Ordinate schneidet g'' in T''.

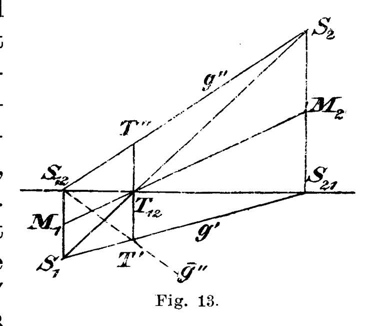


Fig. 13.

Was den Schnittpunkt U mit der zweiten Halbierungsebene angeht, so müssen hier U' und U'' zusammenfallen; U' muß aber auf g', U'' auf g'' liegen, also ist $U' \equiv U''$ der Schnittpunkt $g'g''$, in welchen die beiden Punkte U', U'' zusammenfallen.

II. Fall. Die Gerade sei senkrecht zur Achse und gegeben durch zwei ihrer Punkte $A \equiv (A', A'')$, $B \equiv (B', B'')$. Auflösung: Man nehme (vgl. Nr. 9) beliebig zwei auf derselben Ordinate gelegene Punkte O' und O'' und bestimme die Perspektivitätsachse u der beiden Büschel $O'(A', B' \ldots)$, $O''(A'', B'' \ldots)$, welche die Gerade $g' \equiv g''$ in einem Punkte trifft, welcher der einzige endliche Doppelpunkt der beiden ähnlichen Punktreihen $A', B' \ldots$ und $A'', B'' \ldots$ ist; in diesen fallen also die beiden Projektionen U' und U'' des gesuchten Punktes U zusammen. — Um T zu finden, beachten wir, daß das T' und T'' entsprechende Punkte in den durch A', B' und A'', B'' bestimmten ähnlichen Punktreihen sind, und außerdem symmetrisch zur Achse sowohl, als auch zu dem Schnittpunkte $G \equiv g' a_{12}$ liegen müssen. Konstruieren wir nun die zu A'' und B'' symmetrischen Punkte

A_1 und B_1 in bezug auf D, so erhalten wir eine andere Ähnlichkeit, die durch die Punktepaare A_1, A' und B_1, B' bestimmt ist, in welcher T' der einzige endliche Doppelpunkt ist. Um ihn zu finden, nehmen wir zwei beliebige auf derselben Ordinate gelegene Punkte C' und C_1 und suchen die Perspektivitätsachse v der beiden Büschel $C'(A', B' \ldots)$ und $C_1(A_1, B_1' \ldots)$, dann ist $T' \equiv vg'$, und T'' ist der zu T' in bezug auf G symmetrische Punkt.

Zur Übung: I. Die Punkte T und U für eine zu einer Projektionsebene senkrechte Gerade zu bestimmen. — **II.** Können T oder U unbestimmt werden? (Vgl. Aufg. in Nr. 7). — **III.** Die Punkte $S_1 S_2 T U$ bilden eine harmonische Gruppe, desgleichen $S_1 S_{21} T' U'$ und $S_{12} S_2 T'' U''$; daraus können Bestätigungen für die obige Konstruktion abgeleitet werden, wie auch neue Konstruktionen eines dieser Punkte, wenn die drei anderen gegeben sind. — **IV.** Zu beweisen, daß es ∞^2 Geraden gibt, die, nachdem π_2 in die π_1 niedergeklappt ist, die Eigenschaft haben, daß ihre beiden Spurpunkte zusammenfallen. — **V.** Wodurch sind die zur I Halbierungsebene senkrechten Geraden charakterisiert? — **VI.** Den Schnittpunkt zweier in derselben zur Achse senkrechten Ebene gelegenen Geraden zu finden.

Viertes Kapitel.

Darstellung der Ebene.

13. Die angegebene Methode der Darstellung der Geraden des Raumes, die darin besteht, daß wir ihre Orthogonalprojektionen auf zwei Ebenen betrachten, läßt sich nicht auf Ebenen erweitern, da ja die Projektionen aller Punkte einer Ebene die ganze Projektionsebene bedecken. Wir haben aber gesehen, daß wir eine Gerade auch durch ihre Schnittpunkte mit den Projektionsebenen charakterisieren können, und dieses Verfahren ist einer Erweiterung fähig. Nämlich, jede Ebene ϵ des Raumes schneidet die Ebenen π_1 und π_2 in zwei bestimmten Geraden s_1 und s_2, die sich in einem Punkte E_{12} der Achse treffen, in welchem auch ϵ diese schneidet; wir wollen diese Geraden die horizontale und vertikale Spurlinie oder Spuren nennen. Umgekehrt bestimmen zwei beliebige, durch denselben Punkt E_{12} der Achse gezogene Geraden, von denen die eine s_1 in π_1, die andere s_2 in π_2 liegt, eine Ebene ϵ, deren Spurlinien sie sind. Es besteht daher eine eindeutige Beziehung zwischen den Ebenen ϵ des Raumes und allen sich auf der Achse schneidenden Geradenpaaren, die wir durch $\epsilon \equiv [s_1, s_2]$ ausdrücken wollen, immer voraussetzend, daß s_1 und s_2 sich auf a_{12} schneiden. Spezielle Fälle sind folgende:

1. Ist ϵ parallel zu π_1 (oder π_2), so liegt s_1 (oder s_2) unendlich fern, während s_2 (od. s_1) parallel zur Achse verläuft;
2. Ist ϵ parallel zur Achse, so sind auch s_1 und s_2 parallel zu a_{12},
3. Ist ϵ senkrecht zu π_1 (oder π_2), so läuft $s_2(s_1)$ senkrecht zu a_{12};
4. Wenn ϵ senkrecht zur Achse a_{12} ist, so fallen s_1 und s_2 in eine zu a_{12} senkrechte Gerade.

Die angegebene Darstellung versagt nur in einem Falle, nämlich, wenn ϵ durch die Achse geht, dann fallen s_1 und s_2 mit a_{12} zusammen, und die Lage der Ebene ist jetzt nicht mehr fixiert. In diesem Falle können wir sie aber bestimmen, durch die Lage eines ihrer Punkte $P \equiv (P', P'')$; wenn wir nun dies durch $\epsilon \equiv [P', P'']$ ausdrücken, so soll damit gesagt sein, daß ϵ durch den Punkt $P \equiv (P', P'')$ geht und durch die Achse. Bei einer solchen Ebene schneiden sich die Projektionen irgendeiner ihrer Geraden in einem Punkte der Achse, der zugleich ihre beiden dort vereinten Spurpunkte darstellt.

Aus dieser Methode der Darstellung von Ebenen ergibt sich eine neue Art, Geraden darzustellen, die zur Achse senkrecht sind: wir betrachten nämlich eine solche Gerade als Schnitt zweier Ebenen, von denen die eine zur Achse senkrecht steht, die andere beliebig ist.

14. Aus dem, was über die Spuren der Geraden und Ebenen gesagt wurde, ergibt sich nun sogleich folgendes:

1. Liegt eine Gerade g in einer Ebene ϵ, so liegen auch S_1 und S_2 auf s_1 und s_2 und umgekehrt.
2. Damit zwei Geraden in derselben Ebene liegen (sich schneiden), ist es notwendig und hinreichend, daß die Verbindungslinien ihrer Spurpunkte $S_1 T_1$ und $S_2 T_2$ sich auf a_{12} schneiden.
3. Sind s_1, s_2 und t_1, t_2 die Spurlinien zweier Ebenen σ und τ, so sind die Punkte $(s_1 t_1)$ und $(s_2 t_2)$ die Spurpunkte der Schnittlinie $\sigma\tau \equiv r$; sind daher s_1 und t_1 (oder s_2 und t_2) zueinander (jedoch nicht zu a_{12}) parallel, so ist auch r parallel zu π_2 (oder π_1); wenn jedoch sowohl s_1 und t_1 als auch s_2 und t_2 zueinander parallel sind, ohne jedoch alle zu a_{12} parallel zu sein, so sind auch σ und τ zueinander parallel.
4. Laufen die vier Geraden s_1, t_1, s_2, t_2 sämtlich parallel zu a_{12}, so ist auch die Gerade $\sigma\tau$ parallel zu a_{12}.

Zur Übung: Welche Beziehung muß zwischen den vier Spurlinien zweier Ebenen σ und τ stattfinden, wenn σ und τ sowohl zueinander als auch zu a_{12} parallel sind?

15. Ebenso wie bei einer Geraden kann man auch bei einer Ebene ϵ des Raumes (die nicht durch a_{12} geht) fragen nach den Schnitten t und u mit den beiden Halbierungsebenen. Die Ebene ϵ sei gegeben durch ihre beiden Spuren s_1 und s_2, die sich im Punkte E_{12} der Achse treffen. t und u sowohl wie ihre Projektionen t' und t'', u', u'' gehen dann auch durch E_{12}. Wir betrachten nun eine beliebige Gerade g von ϵ (um sie festzulegen, können wir uns ihre Spurpunkte S_1 und S_2 beliebig wählen, jedoch muß der erstere auf s_1, der letztere auf s_2 liegen), bestimmen ihre Projektionen g' und g'' und ihre Schnittpunkte T und U mit den beiden Halbierungsebenen. T' und T'' mit

E_{12} verbunden liefern uns t' und t'', während $U' \equiv U''$ mit E_{12} verbunden uns $u' \equiv u''$ liefert.

Die letztere Gerade ist von ganz besonderer Wichtigkeit, wie sich aus folgender Betrachtung ergibt: Es sei $\mathfrak{F}$ irgend eine Figur in der Ebene ϵ und $\mathfrak{F}', \mathfrak{F}''$ ihre Projektionen; da diese letzteren perspektiv zu $\mathfrak{F}$ sind, so sind sie zueinander projektiv. Zwei Punkte P' und P'' die sich einander in $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ entsprechen, indem sie Projektionen eines und desselben Punktes P im Raume sind, liegen auf derselben Ordinate. Zwei Geraden g' und g'', die sich in $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ entsprechen, schneiden sich in einem Punkte $\overline{Q}$, in welchen die beiden Projektionen eines Punktes Q zusammenfallen, der der Schnittpunkt von g mit der zweiten Halbierungsebene sein muß. $\overline{Q}$ liegt also auf $u' \equiv u''$. Die beiden Figuren $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ sind also von der Beschaffenheit, daß a) die Verbindungslinien entsprechender Punkte in einen Punkt (das Zenith (s. Nr. 4 Anm.) der Achse) zusammenlaufen, b) die Schnittpunkte entsprechender Geraden sich auf einer und derselben Geraden $u' \equiv u''$ schneiden. **$\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ sind daher affine Figuren; die Affinitätsstrahlen sind die Ordinaten, die Affinitätsachse ist die Gerade $u' \equiv u''$, welche die Projektion der Schnittlinie u der Ebene ϵ mit der zweiten Halbierungsebene ist.** Aus diesem Grunde wird die Gerade $u' \equiv u''$ gewöhnlich als Affinitätsachse der gegebenen Ebene bezeichnet.

Zur Übung: I. Zu zeigen, daß die Geraden $s_1 a_{12} t' u'$ sowohl wie $s_2 a_{12} t'' u''$ ein harmonisches Büschel bilden. — **II.** Eine zu a_{12} senkrechte Gerade sei (vgl. Nr. 13) als Schnittlinie zweier Ebenen, von denen eine zu a_{12} senkrecht steht, gegeben; man bestimme ihre Schnitte mit den beiden Halbierungsebenen.

16. Außer den vier Geraden s_1, s_2, t, u, die wir bei jeder Ebene des Raumes schon betrachtet haben, sind noch zwei Systeme von ∞^1 Geraden für jede Ebene ϵ bemerkenswert, nämlich diejenigen, in welchen ϵ von zu π_1 parallelen Ebenen, und die in welchen ϵ von zu π_2 parallelen Ebenen geschnitten wird: sie heißen Hauptlinien und zwar vertikale oder horizontale; die ersteren projizieren sich auf π_2, die letzteren auf π_1 als Parallele zur Achse. Auf π_1 hingegen projizieren sich die horizontalen Hauptlinien als Parallele zu s_1, die vertikalen auf π_2 als Parallele zu s_2. Diese beiden Gruppen sind im allgemeinen verschieden, sie fallen immer und nur dann zusammen, wenn ϵ parallel zu a_{12}.

Es soll nun das Verfahren dargelegt werden, wie man die Projektionen der Hauptlinien erhält. Zuvor sei jedoch bemerkt, daß man eine Ebene, außer durch ihre beiden Spurlinien, auch durch drei Punkte, oder durch zwei sich schneidende Geraden bestimmen kann, oder durch einen Punkt und eine Gerade[1]), inbesondere kann

1) Diese drei Fälle lassen sich offenbar leicht auf einen derselben zurückführen, weshalb wir im allgemeinen nur einen (den zweiten) Fall betrachten werden.

man auch einen Punkt und die Affinitätsachse der Ebene benutzen; diese neuen Bestimmungsarten bieten den Vorzug, daß man, wenn man dieselben braucht, nicht die Lage, sondern nur die Richtung der Achse zu kennen braucht.

Aufgabe: Die horizontalen oder vertikalen Hauptlinien einer Ebene ϵ darzustellen.

Auflösung: **I. Fall.** Die Ebene sei durch ihre beiden Spuren s_1 und s_2 gegeben. a) der Punkt S_{12} in welchem die drei Geraden s_1, s_2, a_{12} zusammenlaufen, liegt in endlicher Entfernung. Eine beliebige horizontale Hauptlinie h wird sich auf π_2 als eine zur Achse parallele Gerade h'' (s. Fig. 14) projizieren. Der Punkt $H'' \equiv s_2 h''$ ist dann der Spurpunkt von h in π_2. Konstruieren wir nun H_{12} (auf der Achse), so gehört dieser Punkt der h' an und da h parallel zu π_1 und s_1 liegt, so liegt der erste Spurpunkt H_1 im Unendlichen und fällt mit dem unendlich fernen von s_1 zusammen, daher läuft h' parallel zu s_1 durch H_{12}. Analog kann man eine zu a_{12} gezogene Parallele k' als Projektion einer vertikalen Hauptlinie auffassen, deren Spurpunkt $K_1 \equiv s_1 k'$ ist; die zu s_2 durch K_{12} gezogene Parallele liefert dann k''. Als Kontrolle für die Zeichnung merke man sich, daß die drei Punkte $h'h''$, $s_1 s_2$, $k'k''$ auf einer und derselben Geraden, der Affinitätsachse von ϵ liegen müssen. b) Ist dagegen ϵ parallel zu a_{12} so nehme man zunächst h' beliebig und nehme in ϵ irgend eine Gerade g an, die h in P schneidet (Fig. 15); dann ist natürlich $P' \equiv g'h'$ und die entsprechende Ordinate schneidet g'' in P''; die durch P'' zu a_{12} gezogene Parallele ist dann h''. c) Wenn im besonderen Falle ϵ noch durch a_{12} geht und demnach durch einen Punkt $A \equiv (A', A'')$ bestimmt ist, so ziehe man in ϵ durch A eine beliebige Gerade g; ihre Projektionen sind die Verbindungslinien von A', A'', mit einem beliebigen Punkte der Achse; ist nun h'' gegeben und $P'' \equiv g''h''$, so kann man P' sogleich finden; die durch P' zur Achse gezogene Parallele ist h' (Fig. 16).

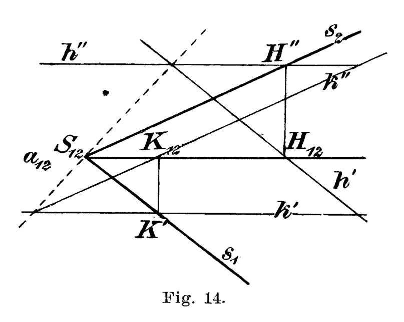


Fig. 14.

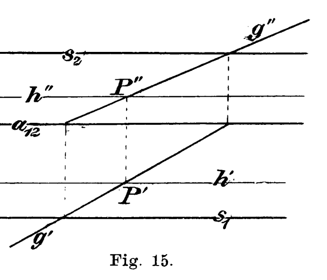


Fig. 15.

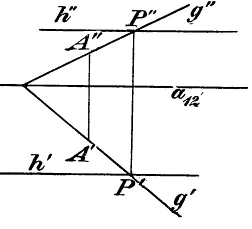


Fig. 16.

II. Fall. Die Ebene sei durch zwei sich

in einem Punkte C schneidende Geraden a und b bestimmt.[1]) Nehmen wir zunächst h'' parallel zu a_{12} als Projektion einer horizontalen Hauptlinie beliebig an; da nun h in der Ebene ab liegt, so schneidet sie a und b in den Punkten D und E, und es ist $D'' \equiv a''h''$, $E'' \equiv b''h''$ (Fig. 17). Die durch D'' und E'' gezogenen Ordinaten schneiden a' und b' in D' und E'; da nun h die Verbindungslinie von D und E ist, so ist $h' \equiv D'E'$. Nimmt man umgekehrt zunächst k' parallel zu a_{12} als Projektion einer vertikalen Hauptlinie, so zeichnet man zuerst die Punkte $H' \equiv k'a'$ und $K' \equiv k'b'$; die entsprechenden Ordinaten schneiden a'' und b'' in H'' und K'', und dann ist $k'' \equiv H''K''$.

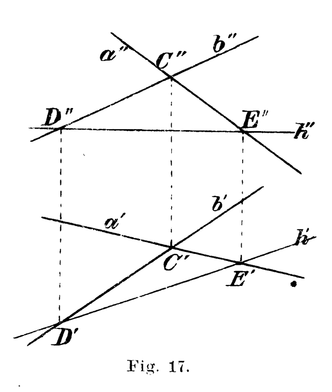


Fig. 17.

III. Fall. Die Ebene sei durch ihre Affinitätsachse $u' \equiv u''$ und einen Punkt $M \equiv (M', M'')$ bestimmt. Die durch M gehende horizontale Hauptlinie heiße a, die vertikale b; dann läuft a'' durch M'' parallel zur Achse (Fig. 18). a' muß außer durch M' noch durch den Punkt $A \equiv a''u''$ gehen, daher ist $a' \equiv AM'$. Ebenso ist b' die durch M' zur Achse gezogene Parallele, die Verbindungslinie von $B \equiv b'u'$ nach M'' liefert uns b''. Nehmen wir nun h'' als Projektion irgend einer horizontalen Hauptlinie, so muß h' parallel zu a' sein und durch den Punkt $P \equiv h''u''$ gehen. Nehmen wir dagegen k' als Projektion einer vertikalen Hauptlinie, also auch parallel zur Achse, so ist k'' die zu b'' durch den Punkt $Q \equiv k'u'$ gezogene Parallele.

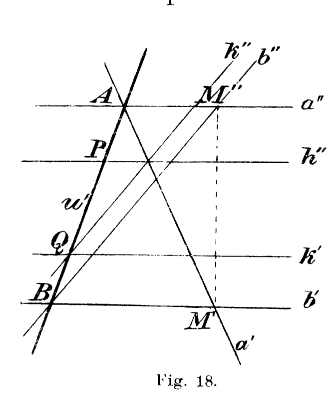


Fig. 18.

Zur Übung: Wie stellen sich die Hauptlinien einer Ebene dar, die senkrecht zu π_1 oder π_2 steht?

17. Aus der vorigen, für die verschiedenen Fälle gelösten Aufgabe ergibt sich auch die Lösung des folgenden wichtigen

Porisma: Von einer, in einer gegebenen Ebene gelegenen Figur $\mathfrak{F}$ kennt man die eine Projektion und die Spuren der Ebene, die andere soll gefunden werden.[2]) **Auflösung:** Gegeben sei z. B. $\mathfrak{F}'$, es soll $\mathfrak{F}''$

1) Man beachte, daß die Gerade, welche die Punkte $a'a''$ und $b'b''$ verbindet, die Affinitätsachse der Ebene ist.

2) Bekanntlich betrachteten die alten Geometer außer den Theoremen und Problemen noch eine dritte Art von Sätzen, die sie Porismen nannten; als solche sahen sie die unvollständigen Theoreme an, die gewisse Bedingungen in

gesucht werden. Wir betrachten zu dem Zwecke einen Punkt M' von $\mathfrak{F}'$, der die Projektion von M in $\mathfrak{F}$ ist. Durch M geht eine vertikale Hauptlinie k, die sich auf π_1 als eine zur Achse parallele Gerade durch M' in k' projiziert; wir bestimmen nun k'' auf welcher M'' liegen muß. M'' liegt aber auch auf der durch M' gezogenen Ordinate und ist dadurch eindeutig bestimmt. Wenden wir diese Konstruktion auf alle Punkte von $\mathfrak{F}'$ an, so erhalten wir $\mathfrak{F}''$.

Hat man jedoch das eine Punktepaar M', M'' gefunden, so kann man auch um $\mathfrak{F}''$ zu finden, den Umstand (Nr. 15) benutzen, daß $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ im Verhältnis der Affinität zueinander stehen, wobei die Affinitätsstrahlen senkrecht zur Achse laufen, und M', M'' ein Paar entsprechender Punkte sind. Da auch die Ebene von $\mathfrak{F}$ gegeben ist, so kennt man auch die Affinitätsachse, und somit ist die Affinität völlig bestimmt. Dieses Verfahren ist unumgänglich, wenn die Ebene von $\mathfrak{F}$ durch die Achse geht und durch $M \equiv [M', M'']$ gegeben ist; alsdann wird letztere zur Affinitätsachse und M', M'' sind entsprechende Punkte.

Zur Übung: Von einer Figur, die in einer der beiden Halbierungsebenen liegt, ist eine Projektion bekannt, die andere soll gefunden werden.

Der aus dem vorigen Porisma fließende Satz, daß eine Figur völlig bestimmt ist, wenn ihre Ebene und eine beliebige ihrer Projektionen gegeben sind, trifft nichtmehr zu, wenn jene Ebene senkrecht zu π_1 oder π_2 steht. Ist z. B. $\epsilon \equiv s_1 s_2$ senkrecht zu π_1 (Fig. 19), so sind zur Bestimmung eines Punktes P oder einer Geraden g nötig und hinreichend die Vertikalprojektionen P'' oder g''; dann findet man nämlich P' sofort als Schnitt der durch P'' gezogenen Ordinate mit s_1, während g' ja mit s_1 zusammenfällt. Nimmt man dagegen P' beliebig auf s_1 an, so ist P'' ein beliebiger Punkt der entsprechenden Ordinate; liegt dagegen P' außerhalb s_1, so liegt P'' (und P) im Unendlichen. Ähnliches gilt für eine zu π_2 senkrechte Ebene.

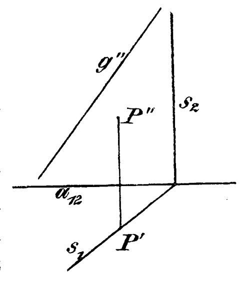


Fig. 19.

ihrem Wortlaut enthielten, die jedoch zu ergänzen sind, indem noch die Größe oder Lage gewisser Gebilde zu bestimmen ist, die zufolge der Voraussetzungen auftreten, und die in dem entsprechenden vollständigen Satze noch zu bestimmen wären. Z. B. ist die Aufgabe: „Den Mittelpunkt eines Kreises zu finden“ ein Porisma, indem sie die Behauptung enthält, daß der gesuchte Punkt auch vorhanden sei. Von dieser Art sind viele Sätze der darstellenden Geometrie, daher wollen wir (dem Beispiel von Chasles und Cremona folgend, die es in anderen, in der höheren Geometrie auftretenden Fällen ebenso tun) diese Bezeichnung anwenden, wie hier, wo die Aufgabe die Behauptung der Existenz der zweiten Projektion in sich schließt.

Fünftes Kapitel.

Einführung einer dritten Bildebene.

18. Es gibt Fälle, in denen man bei der Anwendung von nur zwei Projektionsebenen, wie wir sie bisher benutzt haben, keine eindeutige Darstellung von Gebilden des Raumes erhält: so (m. s. 8 und 13) kann das bisherige System, wenn es nicht gänzlich modifiziert werden soll, nicht dazu dienen, Geraden die senkrecht zur Achse gehen, darzustellen, oder Ebenen, die durch diese gehen. Für solche Fälle pflegt man noch eine dritte Projektionsebene herbeizuziehen, die senkrecht zu den beiden ersten steht, und die wir uns also von vorne nach hinten verlaufend denken. Wir bezeichnen sie mit π_3 und nennen sie dritte Projektionsebene, oder bei der Anwendung der darstellenden Geometrie in der Technik oder Architektur, Seitenrißebene, Profilebene. Die drei Ebenen π_1, π_2, π_3 bilden eine rechtwinklige dreiseitige Ecke, deren Scheitel wir (Fig. 20) mit O bezeichnen, und deren Kanten mit $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$. Auf jeder derselben ist ein positiver Sinn festgelegt (vgl. Nr. 5), sobald man bestimmt hat, welche Gebiete von π_1 und π_2 positiv sein sollen.

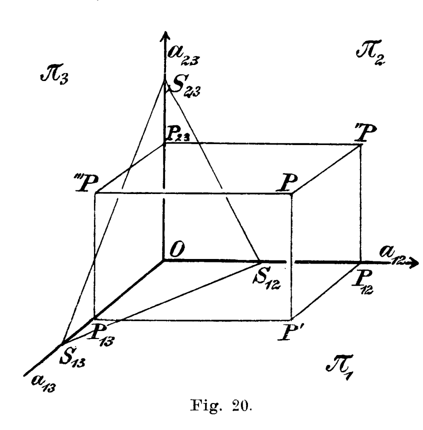


Fig. 20.

Wir betrachten nun die drei Projektionen eines Punktes P im Raume P', $''P$ und $'''P$, resp. auf π_1, π_2 und π_3. Projizieren wir nun jeden dieser drei Punkte wieder auf die beiden anderen Ebenen als P_{12} und P_{13}, P_{21} und P_{23}, P_{31} und P_{32}, so ist $P_{12} \equiv P_{21}$, $P_{13} \equiv P_{31}$, $P_{23} \equiv P_{32}$, und diese drei neuen Punkte liegen bzw. auf den Achsen a_{12}, a_{13}, a_{23}, und es bilden P, P', $''P$, $'''P$, O, P_{12}, P_{13}, P_{23} die Ecken eines Quaders, von dem neun Kanten parallel zu den Achsen sind, und drei auf die Achsen fallen.

Um nun auch hier in einer einzigen Ebene zeichnen zu können, denken wir uns die π_3 um die Achse a_{23} gedreht, bis sie in die π_2 fällt, und zwar so, daß der positive Sinn der Achse a_{13} in der neuen Lage a_{13}' entgegengesetzt dem positiven Sinne von a_{12} wird. Alsdann drehen wir auch π_2 im Verein mit π_3 um die Achse a_{12}, bis sie in die π_1 fällt, jedoch so, daß der positive Sinn von a_{23} entgegengesetzt dem von a_{13} wird. Alsdann haben wir in der Zeichenebene zwei zueinander senkrechte Grundlinien, die wir als Haupt- und Nebenachse bzw. erste und zweite Achse oder Grundlinie bezeichnen können. Die

Punkte $''P$ und $'''P$ nehmen dabei eine neue Lage an, P'' und P''', und es ist klar, daß nach erfolgter Umlegung P' und P'' auf derselben zur ersten Achse senkrechten Geraden liegen, während P'' und P''' auf derselben zur zweiten Achse senkrechten Geraden liegen müssen. — Eine beliebige Ebene wird die Bildebenen π_1, π_2, π_3 je in einer Geraden, s_1, s_2, s_3 schneiden, die sich zu je zweien in demselben Punkte einer Achse treffen, in welchen auch die Ebene die Achsen trifft; die beiden ersten Spuren s_1 und s_2 schneiden sich auf der ersten Achse a_{12}, die beiden letzteren auf der zweiten Achse a_{23}.

19. Da zur Bestimmung eines Punktes oder einer Geraden zwei Projektionen genügen, und da zur Bestimmung einer Ebene auch zwei Spurlinien nötig und hinreichend sind, so sind folgende Aufgaben von Wichtigkeit:

Aufgabe I. Gegeben die beiden Projektionen eines Punktes, Grundriß und Aufriß, den Seitenriß zu finden. Auflösung: Wir benutzen die vorigen Bezeichnungen und nehmen P' und P'', die natürlich auf derselben Ordinate liegen müssen, als gegeben an. Der Punkt P''' (Fig. 21) muß zunächst auf der zu a_{23} senkrechten Geraden $P''P_{23}$ liegen. Beachten wir nun, daß, wenn wir π_3 um a_{23} drehen, der Punkt P_{13} einen Viertelkreis um O als Mittelpunkt beschreibt, und die neue Lage $P_{(13)}$ erhält, so daß also $\overline{OP}_{(13)} = \overline{OP}_{13} = \overline{P_{12}P'}$, so haben wir also weiter P' auf a_{13} zu loten als P_{13} und mit OP_{13} um O einen Kreis zu beschreiben, der $a_{(13)}$ in $P_{(13)}$ trifft; die in $P_{(13)}$ zu a_{23} gezogene Parallele trifft $P''P_{23}$ in dem gesuchten Punkte P'''. Die Strecke $\overline{OP}_{(13)}$ ist als positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem der Punkt P' in das positive oder negative Gebiet von π_1 fällt. Da $\overline{OP}_{13} = \overline{OP}_{(13)}$, so schneiden sich die beiden Geraden $P'P_{13}$, $P'''P_{(13)}$ in einem Punkte P_0 des Winkelhalbierers b der positiven Richtungen der beiden Achsen a_{13}, $a_{(13)}$. Die Punkte P', P'', P''' bilden die Ecken eines Rechtecks, dessen vierte Ecke P_0 also auf der Geraden b liegt; ist diese Gerade nun ein für allemal gezeichnet, so braucht man zur Konstruktion von P''' keinen Zirkel mehr (sondern nur noch die Reißschiene), was für den Zeichner ein bemerkenswerter Vorteil ist. In ähnlicher Weise hat man zu verfahren, wenn P'' und P''' (auf derselben Senkrechten zu a_{23}) gegeben sind und P' gesucht werden soll; noch einfacher findet man P'', wenn P' und P''' (deren Ordinaten sich auf b schneiden müssen!) gegeben sind.

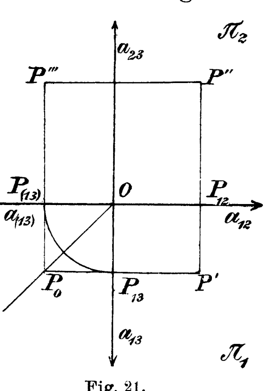


Fig. 21.

Aufgabe II. Gegeben Grundriß und Aufriß einer Geraden, den Seitenriß zu bestimmen. Auflösung: Es sei $g \equiv (g', g'')$ die gegebene Gerade. Wir nehmen auf ihr zwei beliebige Punkte $A \equiv (A', A'')$ und $B \equiv (B', B'')$ und bestimmen nach Aufgabe I die dritten Projektionen A''' und B''', dann ist $g''' \equiv A'''B'''$. Als solche Hilfspunkte wählt man zweckmäßig die Spurpunkte S_1 und S_2 von g mit π_1 und π_2; man hat nur ihre dritten Projektionen S_{13} und S_{23} zu verbinden (Fig. 22), dies liefert uns g'''.

Anmerkung. Um auch den Spurpunkt S_3 von g mit der π_3 zu finden, beachte man 1. daß er in g''' liegt, 2. daß seine zweite Projektion S_{32} sowohl auf der Achse a_{23}, als auch auf g'' liegen muß, er ist also der Schnitt von g''' mit der im Punkte $S_{32} \equiv g''a_{23}$ auf a_{23} errichteten Senkrechten.

Zur Übung: I. Man zeige, wie durch Benutzung der dritten Projektionsebene die Aufgaben in Nr. 11 und 12 II. Fall, in einer anderen Weise gelöst werden können. **II.** Mit Hilfe der Seitenrißebene den Schnittpunkt zweier in derselben, zur ersten Achse senkrechten, Ebene gelegenen Geraden zu bestimmen (vgl. Nr. 12 Schluß).

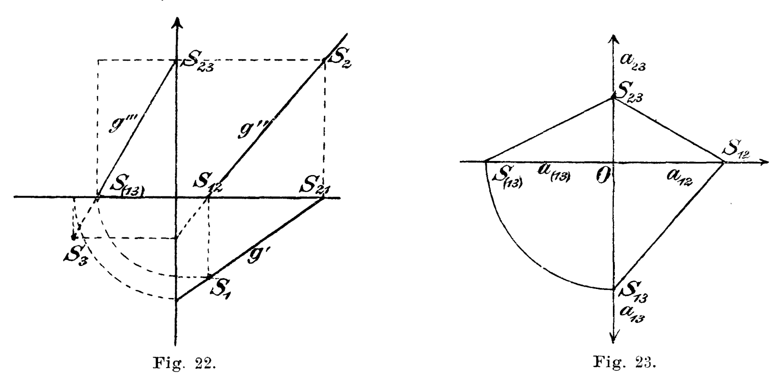


Fig. 22. Fig. 23.

Aufgabe III. Gegeben die horizontale und vertikale Spurlinie einer Ebene: ihren Schnitt mit der Seitenrißebene zu bestimmen. Auflösung: Geht die Ebene durch die erste Achse und ist daher durch einen ihrer Punkte $A \equiv (A', A'')$ bestimmt, so bestimme man nach Aufgabe I den Punkt A''', die Verbindungslinie OA''' ist die gesuchte Linie s_3. — Im allgemeinen Falle wird eine Ebene ϵ die Projektionsebenen π_1, π_2, π_3 je in einer Geraden, die wir bzw. s_1, s_2, s_3 nennen, schneiden, und die Achsen in den Punkten S_{12}, S_{13}, S_{23}. Sind nun s_1 und s_2 gegeben, so haben wir damit auch S_{12}, S_{13} und S_{23} (Fig. 23), und damit auch, wenn alle drei Bildebenen in eine niedergelegt sind, den Punkt $S_{(13)}$. Wir haben also nur mit OS_{13} um O einen Kreis zu beschreiben, der $a_{(13)}$ in $S_{(13)}$ trifft (oder diesen Punkt mit Hilfe der Winkelhalbierungslinie b zu konstruieren) und diesen mit S_{23} zu verbinden, um s_3 zu erhalten. In ähnlicher

Weise kann man, wenn s_2 und s_3 gegeben sind, s_1 finden, ebenso s_2, wenn s_1 und s_3 (zwischen denen eine leicht auffindbare Beziehung besteht) gegeben sind.

Übungsaufgaben: I. Die dritten Spuren der ersten und zweiten Halbierungsebenen zu finden. **II.** Die obigen Lösungen, in geeigneter Weise angewendet, führen zu folgenden Sätzen: 1. Sind zwei Punkte M und N symmetrisch zur ersten Halbierungsebene, so gehören ihre Projektionen derselben Ordinate an, und es sind symmetrisch zur Achse M' und N'', sowie M'' und N'; sind sie hingegen symmetrisch zur zweiten, so fällt M' mit N'' und M'' mit N' zusammen. 2. Sind die beiden Spurpunkte einer Geraden symmetrisch zur Achse, so steht die Gerade senkrecht zur ersten Halbierungsebene, fallen sie dagegen zusammen, so steht sie senkrecht auf der zweiten. 3. Eine Ebene, welche zur Achse parallele und symmetrische Spurlinien hat, ist parallel zur zweiten Halbierungsebene; fallen die Spurlinien aber zusammen, so läuft sie parallel zur ersten.

Eine Anwendung der dritten Projektionsebene kann man machen, wenn man die Projektion $\mathfrak{F}_1$ einer Figur $\mathfrak{F}$ von einem bestimmten Punkte O auf eine Ebene π (die sog. Zentralprojektion oder Perspektive der Figur $\mathfrak{F}$) herstellen will. Wir bilden die betreffende Figur mitsamt dem Punkte O zunächst nach dem Mongeschen Verfahren auf zwei zu π senkrecht stehende Ebenen ab, so daß wir dann π als Seitenrißebene betrachten können. Ist nun $A \equiv (A', A'')$ ein Punkt von $\mathfrak{F}$ (Fig. 24) und A_1 seine Projektion von O auf π, so

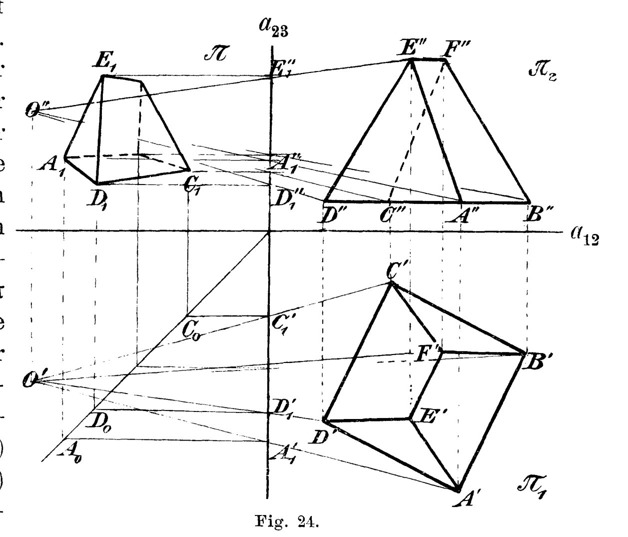


Fig. 24.

ist A_1' der Schnittpunkt von $O'A'$, A_1'' der von $O''A''$ mit a_{13}; man findet also (nach Umklappung von π auf π_2) $A_1 \equiv A'''$ nach dem obigen Verfahren, welches, auf alle Punkte angewendet, die gesuchte Projektion $\mathfrak{F}_1 \equiv \mathfrak{F}'''$ liefert. — Zur Kontrolle beachte man, daß zueinander parallelen Geraden von $\mathfrak{F}$ in demselben Punkte konvergierende Geraden von $\mathfrak{F}_1$ entsprechen.

20. Die Einführung der Seitenrißebene hat zur Folge, daß man noch vier weitere Halbierungsebenen der Winkelräume betrachten kann. Eine beliebige Ebene des Raumes schneidet die sechs Halbierungsebenen in den Seiten eines vollständigen Vierecks, dessen Dia-

gonalendreieck die Schnitte jener Ebene mit den Achsen zu Ecken hat. Betrachten wir die drei Projektionen $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$, $\mathfrak{F}'''$ irgend einer ebenen Figur $\mathfrak{F}$, so haben wir, nachdem die Ebenen π_1, π_2, π_3 in eine niedergelegt sind, zwei Affinitäten, die eine zwischen $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$, die andere zwischen $\mathfrak{F}''$ und $\mathfrak{F}'''$, die Achse der ersteren heißt die erste Affinitätsachse, und wir bezeichneten sie mit u; sie ist der Schnitt der Ebene ϵ der Figur $\mathfrak{F}$ mit der zweiten Halbierungsebene; da für alle ihre Punkte die erste Projektion mit der zweiten zusammenfällt, so könnten wir sie auch mit $u' \equiv u''$ bezeichnen, und konstruieren wir demgemäß ihre Projektion u''' auf π_3, so ergibt sich aus der in Aufgabe I dargelegten Lösung, daß diese mit der früher mit b bezeichneten Winkelhalbierungslinie zusammenfällt. Die andere heißt die zweite Affinitätsachse; wir bezeichnen sie mit v, und können, weil bei ihr die zweite und dritte Projektion ihrer Punkte zusammenfällt, sie auch als $v'' \equiv v'''$ bezeichnen; konstruieren wir ihre erste Projektion v', so ergibt sich, daß auch sie mit b zusammenfällt. Da nun u und v in derselben Ebene ϵ liegen, so schneiden sie sich, folglich müssen die Punkte $u'v'$ und $u''v''$ auf derselben Ordinate zu a_{12}, und $u''v''$, $u'''v'''$ auf derselben zu a_{23} senkrechten Ordinate liegen. Da aber die Geraden u', u'', sowie v'', v''' zusammenfallen und $v' \equiv u''' \equiv b$, so **schneiden sich die beiden Affinitätsachsen auf der Halbierungslinie b des Winkels zwischen den positiven Achsen a_{12} und a_{23}.** Man sieht nun leicht ein, daß diese Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, damit zwei Geraden der Zeichenebene die beiden Affinitätsachsen der Ebene darstellen (man beachte, daß, wenn man auch die Lage, nicht die Richtung, dieser Achsen unbestimmt läßt, dieser Bedingung immer genügt wird). Es ergibt sich hieraus eine neue Art, eine Ebene zu individualisieren, indem man ihre beiden Affinitätsachsen angibt. Sind diese gegeben, so kann man, wenn man eine Projektion eines Punktes oder einer Geraden kennt, die beiden anderen bestimmen; es genügt offenbar, dies für eine Gerade zu zeigen, da man jeden Punkt als Schnitt zweier Geraden betrachten kann.

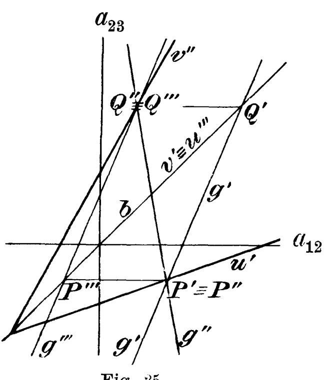


Fig. 25.

a) Es sei außer den Achsen $u' \equiv u''$ und $v'' \equiv v'''$ noch g' gegeben (Fig. 25). g und u schneiden sich in einem Punkte P derart, daß $P' \equiv P'' \equiv u'g'$; man bestimme, wie oben, den Punkt P'''. Ist nun $Q \equiv gv$, also $Q' \equiv g'v'$, so ist, da v' mit b zusammenfällt, Q' der Schnitt von b mit g'; die durch Q' zur Achse a_{12} gezogene Parallele trifft $v'' \equiv v'''$ in $Q'' \equiv Q'''$; dieser Punkt mit P'' und P''' verbunden liefert g'' und g'''.

b) In analoger Weise hätte man zu verfahren, wenn g''' gegeben wäre.

c) Ist endlich g'' gegeben, so wollen wir mit P und Q die Punkte gu und gv bezeichnen, dann ist offenbar $P' \equiv P'' \equiv g''u''$ (Fig. 26); man bestimme dann wie oben P'''. Q'' und Q''' fallen zusammen in $g''v''$, daraus findet man Q'; dann ist $g' \equiv P'Q'$, $g''' \equiv P'''Q'''$.

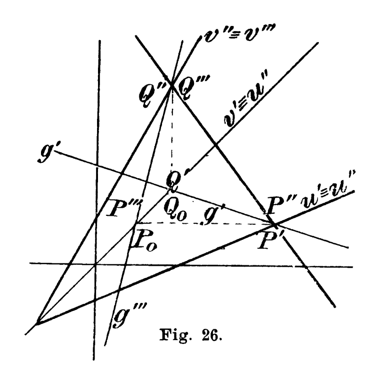


Fig. 26.

Sechstes Kapitel.

Die Fundamentalaufgaben der Geometrie der Lage.

21. Die bisherigen Darlegungen ermöglichen es uns nun, die Probleme der reinen Geometrie der Lage mittels Konstruktionen, die in der Ebene ausgeführt werden, zu lösen, d. h. solche Probleme, bei denen unter den gegebenen oder gesuchten Stücken keine Längen- oder Winkelmaße oder die Bedingung des Senkrechtstehens vorkommen. Derartiger Probleme gibt es natürlich unzählig viele; sie lassen sich jedoch alle lösen, wenn man vier bestimmte von ihnen zu lösen weiß[1]), die als einfache und nicht zurückführbare Elemente gelten und die man daher die Fundamentalaufgaben der Geometrie der Lage[2]) nennt; wie sich aus ihrem Wortlaut ergibt, sind sie zu je zweien einander dual, nämlich:

I. Die Verbindungslinie zweier Punkte zu konstruieren (d. h. wenn die Darstellungen zweier Punkte gegeben sind, die ihrer Verbindungslinie zu finden).	**II. Die Schnittlinie zweier Ebenen zu konstruieren** (d. h. wenn die Darstellungen zweier Ebenen gegeben sind, die ihrer Schnittlinie zu finden).
III. Die Ebene zu bestimmen, die durch einen gegebenen Punkt und eine gegebene Gerade geht[3]).	**IV. Den Schnittpunkt einer Ebene mit einer Geraden zu bestimmen.**

1) Vgl. Staudt, *Geometrie der Lage,* Nürnberg 1847, S. 30.

2) In jedem Abschnitte der darstellenden Geometrie gibt es eine Anzahl Fundamentalaufgaben, aus deren Lösung sich alle übrigen ergeben; in der Wahl derselben herrscht oft eine gewisse Willkür.

3) Ist die Aufgabe I gelöst, so kann man Aufgabe III auch durch die folgende ersetzen: **Die Ebene zu bestimmen, die durch drei gegebene Punkte geht.**

Es sollen nun die Lösungen dieser Aufgaben gegeben werden, sowohl für den allgemeinen Fall, als auch für die bemerkenswertesten Spezialfälle [1]).

Was die I. Aufgabe anlangt, so ist darüber wenig zu sagen: sind $A \equiv (A', A'')$, $B \equiv (B', B'')$ die gegebenen Punkte, so hat ihre Verbindungslinie die Geraden $A'B'$ und $A''B''$ zu Projektionen. Einer der gegebenen Punkte kann im Unendlichen liegen, in dem Falle lautet diese Aufgabe folgendermaßen: **Durch einen gegebenen Punkt $A \equiv (A', A'')$ die Parallele zu einer gegebenen Geraden $g \equiv (g', g'')$ zu ziehen.** Da der Parallelismus erhalten bleibt, wenn man von einer Figur zu ihrer Orthogonalprojektion übergeht, so sind die Projektionen der gesuchten Geraden nichts anderes, als die durch A' bzw. A'' zu g' bzw. g'' gezogenen Parallelen. Wenn aber die Gerade g senkrecht zur Achse läuft, und demnach durch zwei ihrer Punkte $M \equiv (M', M'')$ und $N \equiv (N', N'')$ bestimmt ist (wobei M', M'', N', N'' auf derselben Ordinate liegen), so konstruiere man die Strecken $\overline{A'B'}$ und $\overline{A''B''}$ gleich und gleichgerichtet mit $\overline{M'N'}$ und $\overline{M''N''}$; die gesuchte Gerade ist dann diejenige, welche die Punkte A und B enthält.

Anwendung: Gegeben seien zwei zur Achse parallele Geraden a und b. Diese bestimmen eine ebenfalls zur Achse parallele Ebene; es sollen die Schnittlinien der Ebene ab mit den Projektionsebenen gefunden werden. Man nehme auf a einen Punkt A, auf b einen Punkt B an; die Gerade AB liegt dann in der Ebene ab. Man bestimme deren Projektionen und daraus ihre Spurpunkte S_1, S_2 (Nr. 11); die durch diese zur Achse gezogenen Parallelen sind die gesuchten Schnittlinien.

22. Bei der Behandlung der **II. Fundamentalaufgabe** betrachten wir gesondert die verschiedenen Hauptarten (vgl. Nr. 16), auf welche eine Ebene bestimmt sein kann.

a) Die Ebenen seien durch ihre Spurlinien bestimmt, nämlich $\delta \equiv [s_1, s_2]$, $\epsilon \equiv [t_1, t_2]$. Der erste Spurpunkt der Schnittlinie $\delta\epsilon$ wird dann der Punkt T_1 sein, in welchem sich s_1 und t_1 schneiden die zweite Spur ist der Punkt $T_2 \equiv s_2 t_2$, man kennt also die Spurpunkte der gesuchten Geraden x und kann also (nach Nr. 11) ihre Projektionen bestimmen. Sollten zufällig s_1 und t_1 (oder s_2 und t_2) einander parallel sein, so ist die angegebene Konstruktion dennoch anwendbar; es würde dann x' zu ihnen parallel werden und x'' zur Achse. Wenn ferner sowohl s_1 und t_1 als auch s_2 und t_2 zueinander

1) Spezialfälle können bei einer Aufgabe aus der darstellenden Geometrie auf zweierlei Weise entstehen: entweder, indem die gegebenen Stücke eine besondere Lage im Raume einnehmen (z. B. unendlich fern liegen), oder wenn sie eine spezielle Lage in bezug auf die Bildebene haben (z. B. wenn eine Ebene durch eine der Achsen geht).



parallel wären, aber nicht zur Achse, so wären auch δ und ϵ einander parallel und ihre Schnittlinie mitsamt deren Projektionen würden ins Unendliche fallen. — Die Konstruktion würde theoretisch ihre Geltung behalten, praktisch aber nicht anwendbar sein, wenn die Punkte T_1 und T_2, oder einer von ihnen, außerhalb des Zeichenblattes fielen. Man benutzt in diesem Falle zwei Hilfsebenen α und β und bestimmt nach der allgemeinen Methode die Schnittlinien $\alpha\delta$ und $\alpha\epsilon$, sowie $\beta\delta$ und $\beta\epsilon$, ebenso die Punkte A und B, in welchen sich die beiden ersten und die beiden letzten schneiden; die Verbindungslinie AB ist die gesuchte Gerade. Im allgemeinen wählt man zweckmäßig die Ebenen α und β parallel den Projektionsebenen. Die bezügliche Konstruktion, wobei α parallel zu π_1, also a_2 parallel zur Achse, β parallel zu π_2, also b_1 parallel zur Achse, und b_2 im Unendlichen, ist in Fig. 27 wiedergegeben. Aber auch dieses Verfahren kann praktisch unausführbar werden, wenn der Winkel, den die Spurlinien mit der Achse bilden, sich einem Rechten nähert; es kann alsdann durch

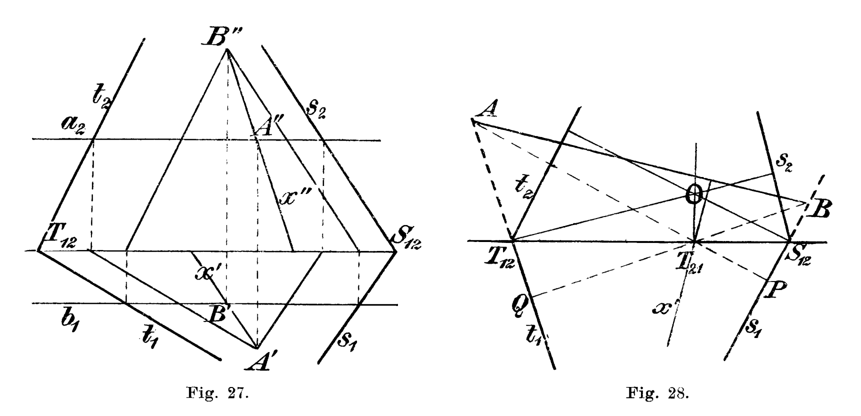


Fig. 27.

Fig. 28.

folgendes ersetzt werden[1]): Es sei O der Punkt, in welchem sich die von S_{12} und T_{12} auf t_2 und s_2 bzw. gefällten Lote treffen (Fig. 28). Das von O auf die Achse gefällte Lot ist dann der untere Höhenabschnitt für das Dreieck, dessen Seiten die Achse und die beiden Vertikalspuren sind; also ist der Fußpunkt desselben nichts anderes, als die Horizontalprojektion T_{21} des zweiten Spurpunktes der gesuchten Geraden; x' muß folglich durch diesen Punkt und den (unzugänglichen) Punkt $T_1 \equiv s_1 t_1$ gehen. Um nun x' zu finden, ziehen wir durch T_{21} die Senkrechte $AT_{21}P$ zu s_1 und $BT_{21}Q$ senkrecht zu t_1; diese beiden Geraden sind dann zwei Höhen des Dreiecks ABT_1, die dritte wird die von T_{21} auf AB gefällte Senkrechte sein, folglich gehört sie der Geraden x' an. In ähnlicher Weise findet man x''. —

1) Ein anderer Kunstgriff wird in Gugler, *Lehrbuch der descriptiven Geometrie* (IV. Aufl., Stuttgart 1880, S. 21), vorgeschlagen.

Die angegebene Konstruktion versagt auch in dem Falle, daß die beiden gegebenen Ebenen δ und ϵ durch denselben Punkt der Achse gehen, wenn also S_{12} und T_{12} zusammenfallen; alsdann muß sowohl die gesuchte Gerade, als auch ihre Projektionen durch diesen Punkt gehen, es genügt also, um diese zu bestimmen, ein weiterer Punkt X. Zu diesem Zwecke benutzen wir (Fig. 29) eine Hilfsebene $\alpha \equiv [a_1, a_2]$ und bestimmen ihre Schnittlinien $c \equiv (c', c'')$ und $e \equiv (e', e'')$ mit δ bzw. ϵ, diese schneiden sich in einem Punkte X der gesuchten Ge-

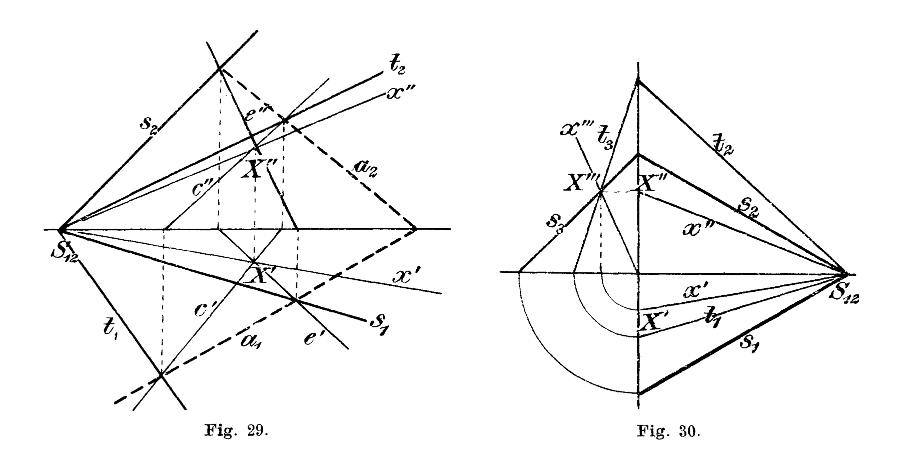


Fig. 29. Fig. 30.

raden, und es ist $X' \equiv c'e'$, $X'' \equiv c''e''$. Diese beiden Punkte liefern mit S_{12} verbunden x' und x''. Als Hilfsebene kann auch die Seitenrißebene benutzt werden, wie es Fig. 30 zeigt. Man beachte auch, daß diese Konstruktion keine wesentlichen Änderungen erfährt, wenn der Punkt $S_{12} \equiv T_{12}$ ins Unendliche rückt; es wird dem Leser geraten diese Konstruktion auszuführen.

Um obige Konstruktion für den Fall auszuführen, daß eine der beiden Ebenen, etwa ϵ durch die Achse geht und also durch einen Punkt $A \equiv (A', A'')$ bestimmt ist, nehme man als Hilfsebene die Seitenrißebene, die durch A geht. Man konstruiere die dritten Spuren s_3 und t_3 der gegebenen Ebene; diese schneiden sich in der dritten Projektion X''' eines Punktes, der der gesuchten Geraden angehört. X'' und X' werden auf a_{23} liegen. Da die gesuchte Gerade, sowie ihre Projektionen durch T_{12}, in welchem Punkte δ die Achse schneidet, gehen müssen, so sind diese sogleich bestimmt.

b) Die beiden Ebenen seien durch zwei sich schneidende Geradenpaare a, b und c, d bestimmt. — Wir bestimmen die Punkte X und Y, in denen die Geraden c und d die Ebene ab schneiden; ihre Verbindungslinie ist die gesuchte Gerade. Diese Lösung erfordert aber die Kenntnis der Auflösung der IV. Fundamentalaufgabe (s. Nr. 24).

c) Die gegebenen Ebenen seien beide durch einen ihrer Punkte und die Affinitätsachsen bestimmt. Es seien $A \equiv (A', A'')$ und $a' \equiv a''$ die betreffenden Elemente für die Ebene $\mathfrak{d}$, $B \equiv (B', B'')$ und $b' \equiv b''$ die für ϵ (s. Fig. 31). Die gesuchte Gerade $x \equiv \mathfrak{d}\epsilon$ schneidet die zweite Halbierungsebene in einem Punkte X, dessen Projektionen zusammenfallen; diese liegen sowohl auf a' als auch auf b'; es ist daher $X' \equiv X'' \equiv a'b' (\equiv a''b'')$. Durch diesen Punkt gehen auch die Projektionen von x, man hat also nur noch einen Punkt dieser Geraden aufzusuchen. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Gerade $A'B'$ sowohl als Projektion einer Geraden l von $\mathfrak{d}$, als auch einer m von ϵ, und bezeichnen sie daher sowohl mit l' als auch mit m'. Dann wird offenbar l'' die Verbindungslinie von A'' mit dem Punkte $a'l'$ sein,

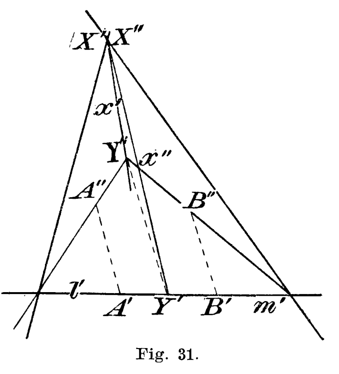


Fig. 31.

und m'' die von B'' mit $b'm'$. Da l und m die erste Projektion gemeinsam haben, so müssen sie sich schneiden, und zwar in einem Punkte Y, und da l der Ebene $\mathfrak{d}$, m der ϵ angehört, so liegt Y auf der Geraden $\mathfrak{d}\epsilon$. Nun ist $Y'' \equiv l''m''$ und Y' der Schnitt der entsprechenden Ordinate mit $l' \equiv m'$. Es sind also $X'Y'$ und $X''Y''$ die Projektionen der gesuchten Geraden. — Man beachte, daß man die Achse für die Konstruktion nicht nötig hat.

23. Um die **III. Fundamentalaufgabe**, die Ebene zu bestimmen, welche durch einen Punkt $P \equiv (P', P'')$ und eine Gerade $g \equiv (g', g'')$ geht, zu lösen, beachte man zunächst, daß die Spurlinien der Ebene auch durch die Spurpunkte G_1 und G_2 der Geraden hindurchgehen. Zieht man alsdann durch P eine Gerade r, die parallel zu g ist, so liegt diese bekanntlich in der gesuchten Ebene; hat man nun deren Spurpunkte R_1 und R_2 gefunden, so hat man einen zweiten Punkt für die beiden Spurlinien, welche also die Geraden G_1R_1 und G_2R_2 sind. Als Kontrolle merke man, daß beide sich auf der Achse schneiden müssen. Sollten die Punkte G_1, G_2, R_1, R_2 alle oder zum Teil außerhalb des Zeichenblattes fallen, so benutze man, um zu dem gewünschten Resultate zu gelangen, die Spuren der Geraden, die P mit eigentlichen Punkten von g verbinden.

Im Falle die Gerade g senkrecht zur Achse läuft, und demnach durch zwei Punkte M und N bestimmt werden muß, so würde die gesuchte Ebene durch die Geraden PM und PN bestimmt sein, und dann sind ihre Spuren leicht zu finden.

Zur Übung: Man konstruiere die Spurlinien einer Ebene, die durch einen ihrer Punkte und die Affinitätsachse bestimmt ist.

Die vorhin behandelte Aufgabe bietet zwei bemerkenswerte Spezialfälle, die entstehen, wenn der gegebene Punkt oder die Gerade ins Unendliche fallen.

a) Durch eine Gerade eine zu einer anderen Geraden parallele Ebene zu legen. Es seien $a \equiv (a', a'')$ und $b \equiv (b', b'')$ die beiden gegebenen Geraden. Wir nehmen auf a beliebig einen Punkt $P \equiv (P', P'')$ und ziehen durch ihn die Gerade $p \equiv (p', p'')$ parallel zu b (s. Nr. 21). Die Ebene der beiden Geraden a, p ist die gesuchte und ihre Spurlinien sind leicht zu finden.

Zur Übung: I. Wie ändert sich diese Konstruktion, wenn eine oder beide Geraden zur Achse senkrecht liegen? **II.** Wie für den Fall, daß eine der Geraden parallel zur Achse läuft? **III.** Durch eine gegebene Gerade eine Ebene zu legen, die zwei gegebene Ebenen in zueinander parallelen Geraden schneidet.

b) Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, die zu einer gegebenen Ebene parallel läuft. Die gegebenen Stücke seien $M \equiv (M', M'')$ und $\mu \equiv [m_1, m_2]$ (Fig. 32). Die gesuchte Ebene $\epsilon \equiv [s_1, s_2]$ wird als Spurlinien zwei zu m_1 und m_2 parallele Geraden haben müssen. Um s_1 und s_2 zu erhalten, denken wir uns durch M in der Ebene ϵ die horizontale Hauptlinie h gezogen, dann ist h'' die durch M'' zur Achse gezogene Parallele, während h' die durch M' zu s_1, also auch zu m_1 gezogene Parallele ist. Wir bestimmen hierdurch den zweiten Spurpunkt H_2 von h; die durch ihn zu m_2 gezogene Parallele liefert uns s_2 und den Schnitt S_{12} von ϵ mit der Achse, durch welchen auch s_1 parallel zu m_1 geht.

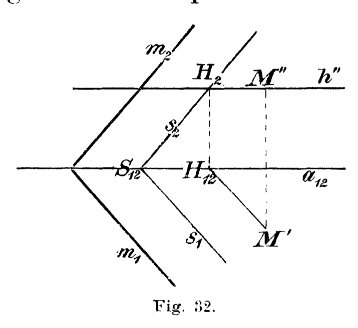


Fig. 32.

Die Konstruktion versagt, wenn die Ebene μ parallel zur Achse liegt, alsdann wird auch ϵ parallel dazu. Man zeichne dann eine beliebige in μ gelegene Gerade g (für welche man zweckmäßig die Spuren annimmt, die eine auf m_1, die andere auf m_2) und ziehe dann durch M zu ihr eine Parallele p; diese liegt in der gesuchten Ebene, deren Spurlinien demnach die zur Achse durch die Spurpunkte von g gezogenen Parallelen sind.

Zur Übung: Durch einen Punkt P soll eine Ebene gelegt werden, die zu einer gegebenen Ebene parallel ist, wenn letztere durch zwei sich schneidende Geraden, oder auch durch einen Punkt und ihre Affinitätsachse bestimmt ist.

24. Um den Schnittpunkt einer Geraden $g \equiv (g', g'')$ mit einer Ebene ϵ zu finden **(IV. Fundamentalaufgabe)**, lege man durch g eine beliebige Ebene $\sigma \equiv [s_1, s_2]$ und bestimme deren Schnittlinie e mit ϵ; der den Geraden e und g gemeinsame Punkt X ist der gesuchte. Diese Konstruktion läßt sich bedeutend vereinfachen, wenn man die

Hilfsebene σ zweckmäßig wählt. Z. B. kann man, wenn g nicht senkrecht zur Achse läuft, als Hilfsebene diejenige wählen, welche g auf die π_1 projiziert. Dann fällt g' (s. Fig. 33) mit s_1 zusammen und s_2 steht senkrecht zur Achse im Schnittpunkte der letzteren mit g'. e' fällt ebenfalls mit g' zusammen. Sind nun t_1 und t_2 die Spurlinien von ϵ, so sind die Punkte $t_1 s_1 \equiv S_1$ und $t_2 s_2 \equiv S_2$ die Spurpunkte von e; man kann also auch e'' leicht bestimmen. e'' und g'' müssen sich nun in X'' schneiden, während X' auf der zugehörigen Ordinate und auf g' liegt. In dem Falle, daß g parallel zu ϵ, wird e'' parallel zu g'' werden.

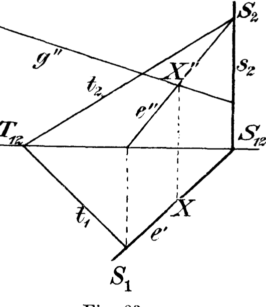


Fig. 33.

Wenn man die Gerade g senkrecht zur Achse annimmt, und sie alsdann durch zwei Punkte A und B festlegt, so nehmen wir die durch $g \equiv AB$ senkrecht zur Achse gelegte Ebene als Seitenrißebene und bestimmen (nach Nr. 19) die dritte Spurlinie t_3 der Ebene $\epsilon \equiv [t_1, t_2]$, deren Schnitt mit g ist der gesuchte Punkt $X \equiv X'''$, aus welchem sich leicht die Punkte X' und X'' ableiten lassen (Fig. 34). Dasselbe Verfahren ist im wesentlichen auch anwendbar, wenn die

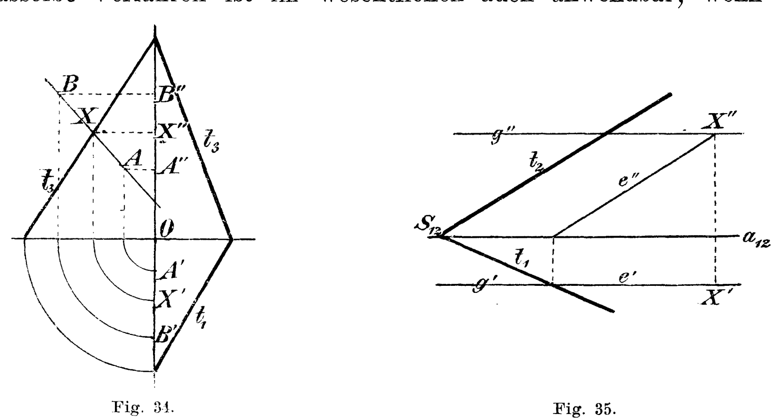


Fig. 34. Fig. 35.

Gerade $g \equiv (g', g'')$ parallel zur Achse liegt. Sind wieder t_1 und t_2 die Spurlinien der gegebenen Ebene ϵ (Fig. 35), so nehmen wir als Hilfsebene diejenige, welche g auf π_2 projiziert; dann wird $e' \equiv g'$, und e'' muß parallel zu t_2 werden. Der Punkt $e''g''$ ist dann X'', während X' auf der zugehörigen Ordinate und auf g' liegt. $X \equiv (X', X'')$ ist der gesuchte Punkt.

Zur Übung: I. Welche Bedingungen müssen die Projektionen einer Geraden erfüllen, damit diese parallel zu einer Ebene sei, die senkrecht zur horizontalen (oder vertikalen) Bildebene steht? **II.** Man beweise folgenden Satz: Ist eine Gerade mit den Spurpunkten S_1 und S_2 parallel zu einer Ebene, deren Spurlinien s_1 und s_2 sind, so müssen sich die durch S_1 und S_2 zu s_1 und s_2 ge-

zogenen Parallelen auf der Achse schneiden. **III.** Man löse die IV. Fundamentalaufgabe für folgende Fälle: Die Gerade liegt in einer zur Achse senkrechten Ebene; die gegebene Ebene geht durch die Achse; beide Fälle treten zu gleicher Zeit ein.

Es soll nunmehr die IV. Fundamentalaufgabe gelöst werden unter der Voraussetzung, daß die Ebene nicht durch ihre Spuren gegeben ist.

a) Den Punkt zu finden, in welchem die Gerade $g \equiv (g', g'')$ die durch zwei sich schneidende Geraden $a \equiv (a', a'')$, $b \equiv (b', b'')$ bestimmte Ebene schneidet (Fig. 36).

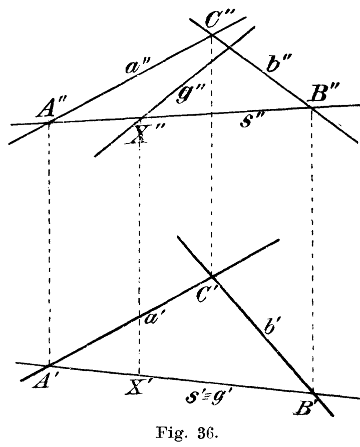


Fig. 36.

Die Gerade g' kann man als Projektion einer Geraden s der Ebene ab ansehen. Um s'' zu finden, beachten wir, daß s die Geraden a und b in zwei Punkten A und B schneidet, deren erste Projektionen die Punkte $A' \equiv a'g'$ und $B' \equiv b'g'$ sind; die durch A' und B' gezogenen Ordinaten schneiden a'' und b'' bzw. in A'' und B'', deren Verbindungslinie offenbar s'' ist. Die Geraden g und s haben ihre erste Projektion gemeinsam; daher schneiden sie sich in einem Punkte X, und da s in der Ebene ab liegt, so ist X der gesuchte Punkt. X'' ist dann nichts anderes als der Punkt $g''s''$ und X' ist der Punkt, in welchem g' von der zugehörigen Ordinate getroffen wird. Sollte g'' parallel zu s'' werden, so würde g zur Ebene ab parallel sein. Man beachte, daß man die Achse nicht notwendig hat, weshalb sie auch in der Fig. 36 nicht gezeichnet ist.

Das obige Verfahren wird augenscheinlich unbrauchbar, wenn g senkrecht zur Achse liegt. Sind dann A und B die sie bestimmenden Punkte, und C der Punkt ab, so kann man zweckmäßig die Ebene ABC als Hilfsebene wählen, wie man sich leicht überzeugen kann. Eine andere Idee der Lösung wird jedoch binnen kurzem in Nr. 28 dargelegt werden.

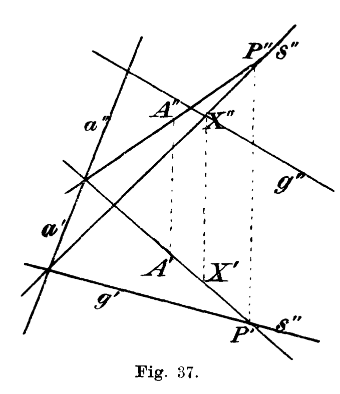


Fig. 37.

b) Den Punkt zu finden, in welchem eine Gerade g eine Ebene τ schneidet, die durch den Punkt $A \equiv (A', A'')$ und ihre Affinitätsachse $a' \equiv a''$ bestimmt ist.

Wenn g nicht senkrecht zur Achse ist, so können wir, um den Punkt $X \equiv g\tau$ zu erhalten, in ähnlicher Weise wie vorhin verfahren. Wir betrachten zu dem Zwecke g' (s. Fig. 37) als erste Projektion

einer Geraden s, die der Ebene τ angehört; s' fällt mit g' zusammen und um s'' zu finden, kann man die zwischen den beiden Projektionen einer und derselben Figur von τ bestehende Affinität benutzen. Nehmen wir nämlich einen ganz beliebigen Punkt P von s, weshalb wir P' auf s' beliebig annehmen können, so finden wir P'' auf der zugehörigen Ordinate und im übrigen so gelegen, daß die Geraden $A'P'$ und $A''P''$ sich auf der Affinitätsachse von τ schneiden, wodurch P'' vollständig bestimmt ist. Da nun P auf s liegt, so muß s'' durch P'' gehen und da s' und s'' sich auf $a' \equiv a''$ schneiden, so kann man s'' sofort finden. Nun ist X (s. o.) nichts anderes als gs, demnach ist $X'' \equiv g''s''$, und X' ist der Schnitt von g' mit der zugehörigen Ordinate. Auch bei dieser Konstruktion tritt die Achse selbst nicht auf.

Wenn hingegen $g \equiv AB$ senkrecht zur Achse ist (Fig. 38), so kann man den Punkt $X \equiv g\tau$ auf folgende Weise finden: Man betrachte die Ebene $\sigma \equiv PAB$ als Hilfsebene und bestimme deren Affinitätsachse; es ist dies die Gerade $b' \equiv b''$, die die Schnittpunkte $P'A'$, $P''A''$ und $P'B'$, $P''B''$ verbindet. Ist nun $I' \equiv I''$ der Schnittpunkt der beiden Achsen $a' \equiv a''$, $b' \equiv b''$, so hat die Gerade $\sigma\tau$ die Geraden $I'P'$ und $I''P''$ als Projektionen. Diese schneiden dann die Gerade, welche alle die Punkte $A'A''$, $B'B'' \ldots$ enthält, in den Projektionen X' und X'' des gesuchten Punktes.

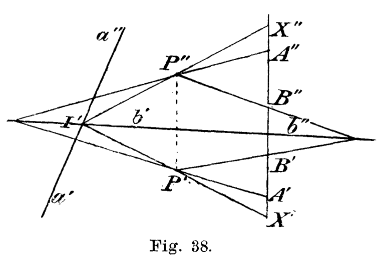


Fig. 38.

Zur Übung: Zu beweisen: Damit die Gerade $g \equiv (g', g'')$ parallel zu der durch den Punkt $A \equiv (A', A'')$ und die Affinitätsachse bestimmten Ebene sei, ist notwendig und hinreichend, daß die durch A' und A'' zu bzw. g' und g'' gezogenen Parallelen sich auf dieser Achse schneiden.

Siebentes Kapitel.

Andere Probleme der Geometrie der Lage.

25. Nachdem die vier Fundamentalaufgaben der Geometrie der Lage gelöst sind, lassen sich die übrigen Aufgaben dieser Art durch eine geeignete Kombination jener ausführen. So ist die Auffindung des Punktes, der drei Ebenen gemeinsam ist, zurückzuführen auf die des Punktes, in welchem die Schnittlinie zweier dieser Ebenen (Nr. 22) die dritte Ebene schneidet (Nr. 24); ein anderes Verfahren wird in Nr. 27 dargelegt werden. Weitere lehrreiche Beispiele ähnlicher Zurückführungen bieten die in diesem Kapitel zu behandelnden Aufgaben.

Aufgabe. Die Gerade zu konstruieren, die durch einen gegebenen Punkt $P \equiv (P', P'')$ geht und zwei gegebene windschiefe Geraden r und s schneidet. Auflösung: Die gesuchte Gerade ist offenbar die Schnittlinie der beiden Ebenen Pr und Ps, oder auch die Verbindungslinie von P mit demjenigen Punkte, in welchem s die Ebene Pr schneidet. Nun kann man die Ebene Pr auffassen als bestimmt durch die Gerade r und die Gerade p, die durch P parallel zu r gezogen wird; sie wird von s in einem Punkte X geschnitten, der sich nach Nr. 24a bestimmen läßt. PX ist dann die gesuchte Gerade (s. Fig. 39).

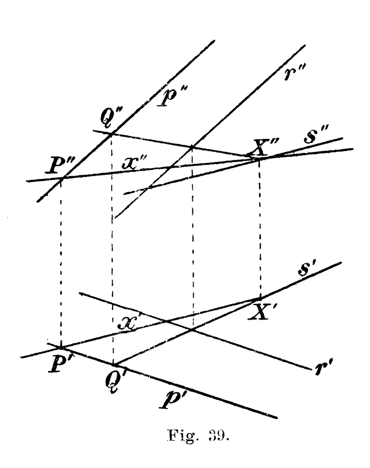


Fig. 39.

Folgesatz: Durchläuft der Punkt P eine dritte Gerade t, die weder r noch s trifft, so gelangt man durch das obige Verfahren zu der Darstellung der durch drei gerade Leitlinien bestimmten Regelschar; eine der Geraden r, s, t kann auch im Unendlichen liegen.

Zur Übung: I. Durch einen Punkt eine Gerade zu ziehen, die parallel zu einer Ebene liegt und eine andere gegebene Gerade trifft. **II.** Eine Gerade zu konstruieren, die in einer gegebenen Ebene liegt und zwei zueinander windschiefe Geraden trifft (die zur obigen duale Aufgabe) und daraus ein anderes Verfahren abzuleiten zur Konstruktion einer durch ihre drei Leitgeraden bestimmten Regelschar. **III.** Die Aufgabe „Gegeben eine Ebene α, ein Punkt A in derselben und eine beliebige Gerade r; eine andere Gerade x zu finden, die durch A geht, in α liegt und r trifft", läßt sich auf zwei zueinander duale Weisen lösen: Man kann nämlich A mit dem Punkte $r\alpha$ verbinden, oder die Schnittlinie von α mit der Ebene Ar bestimmen. Welche von beiden Methoden ist zweckmäßiger?

26. Aufgabe. Von einer ebenen Figur $ABCD\ldots$ kennt man die Horizontalprojektion aller Punkte, sowie die Vertikalprojektion dreier von ihnen A'', B'', C''; die letztere Projektion zu vervollständigen.

I. Lösung: Die Geraden $A'B'$, $A''B''$ schneiden sich in einem Punkte B_0 der Affinitätsachse der Ebene τ, in welcher die gegebene Figur liegt. Ebenso schneiden sich $A'C'$ und $A''C''$ in einem Punkte C_0 derselben Achse, welche also die Gerade $u \equiv B_0C_0$ ist. Bestimmt man nun den Punkt D_0, in welchem $A'D'$ von u geschnitten wird, und zieht D_0A'', so muß auf dieser Geraden D'' liegen. Andererseits liegt aber D'' auch auf der zu D' gehörenden Ordinate und ist somit bestimmt. Ähnlich findet man die Vertikalprojektionen der übrigen Ecken des Vielecks.

II. Lösung. Ohne die Affinitätsachse zu benutzen, läßt sich dieselbe Aufgabe in elementarer Weise lösen und zwar folgendermaßen: Ist P der Punkt, in welchem sich die Geraden AD und BC schneiden, so ist P' der Schnitt von $A'D'$ und $B'C'$; P'' ist nun der Punkt, in welchem die Gerade $B''C''$ von der zu P' gehörenden Ordinate geschnitten wird. Da nun A, D, P in gerader Linie liegen, so gilt dasselbe auch von $A''D''P''$. D'' ist also der Schnitt von $A''P''$ mit der zu D' gehörigen Ordinate. In ähnlicher Weise findet man E'', F'' ...

27. Nachdem, wie geschehen, die Aufgaben „die Verbindungslinie zweier Punkte zu finden", „durch einen Punkt zu einer Geraden die Parallele zu ziehen" (Nr. 21), sowie „den Schnitt einer Geraden mit einer Ebene zu finden" (Nr. 24), gelöst sind, ist man imstande, die Zentralprojektion einer Figur $\mathfrak{F}$ von einem Punkte aus oder parallel zu einer beliebigen Richtung auf eine beliebig gegebene Ebene zu finden. Es ist dieselbe Aufgabe, wie den Schatten, den eine Figur auf eine gegebene Ebene wirft, zu konstruieren, sei es, daß die Lichtstrahlen von einem Punkte ausgehen, oder sei es, daß sie parallel laufen. Ein besonderer Fall dieser Aufgabe wurde schon (Nr. 19) untersucht; jetzt sollen uns andere beschäftigen.

a) Nehmen wir an, die Horizontalebene sei die Grundebene und die Richtung der projizierenden Strahlen sei die der Geraden $d \equiv (d', d'')$. Ist dann $P \equiv (P', P'')$ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{F}$, so ist seine Parallelprojektion auf die Grundebene P_1 nichts anderes, als der horizontale Spurpunkt des zu d parallelen Projektionsstrahles. Das Dreieck $PP'P_1$ ist rechtwinklig in P' und hat in P_1 den Winkel α. Die Kathete PP' ist gleich dem absoluten Werte $|p|$ der ersten Kote p des Punktes P; also ist $P'P_1 = |p| \cot\alpha$. Um P_1 zu finden genügt es also, von P' aus eine Strecke von der Länge $|p| \cot\alpha$ und parallel zu d' zu ziehen. Was die Richtung angeht, so bestimmt sich diese aus der direkt zu bestimmenden Projektion A_1 eines gewissen Punktes $A \equiv (A', A'')$, indem man beachtet, daß der Sinn von $P'P_1$ mit dem von $A'A_1$ übereinstimmt oder nicht, je nachdem die ersten Koten von A und P dasselbe oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Bemerkenswert ist der Fall, daß $\alpha = \frac{\pi}{4}$, alsdann heißt diese Projektion wegen ihrer Anwendung in der Fortifikationslehre Militärperspektive: hierbei ist $P'P_1 = |p|$. Nehmen wir im besonderen obendrein an, daß die Gerade d senkrecht zur Achse sei, so liegen P', P_1, P'' auf derselben Ordinate, und wenn P_{12} der Schnitt mit der Achse ist, so sind die beiden Strecken $P'P_1$ und $P_{12}P''$ von gleicher Länge und, wo man auch P wählen mag, von demselben oder von entgegengesetztem Sinne. Setzen wir daher fest, daß die beiden Strecken $P'P_1$ und $P_{12}P''$ immer äquipollent seien, so genügt

es, um die Militärprojektion einer Geraden $g \equiv (g', g'')$ zu finden, die zweier ihrer Punkte zu verbinden, als welche man zweckmäßig die Spurpunkte S_1 und S_2 der Geraden wählt. In diesem Falle fällt sowohl T_1 als auch T_2 mit seiner Militärprojektion zusammen; **also ist die Militärprojektion einer Geraden in diesem Falle die Verbindungslinie ihrer Spurpunkte.** Diese Bemerkungen liefern uns eine bemerkenswerte Lösung der folgenden

Aufgabe: Den Punkt zu finden, der den drei Ebenen $[s_1, s_2]$, $[t_1, t_2]$, $[u_1, u_2]$ gemeinsam ist.[1])

Es seien (Fig. 40) $S_1 T_1 U_1$ die Ecken des von s_1, t_1, u_1 und S_2, T_2, U_2 die des von $s_2 t_2 u_2$ gebildeten Dreiecks; dann sind die drei Geraden $S_1 S_2$, $T_1 T_2$, $U_1 U_2$ die Militärprojektionen der drei Geraden, in welchen sich die gegebenen Ebenen schneiden, diese laufen daher in einen Punkt X_1 zusammen, der die Militärprojektion des gesuchten Punktes X ist[2]). Um nun X' und X'' zu finden, beachte man, daß diese auf der durch X_1 gehenden Ordinate liegen müssen; nun konstruiere man die Horizontalprojektion einer der gegenseitigen Schnittlinien der drei Ebenen, indem man beispielsweise den Punkt $T_1 \equiv T_1'$ mit T_2' verbindet. Diese Linie trifft jene Ordinate in X'; um X'' zu finden, beachte man bloß, daß die Strecken $\overline{X'X_1}$ und $\overline{X_{12}X''}$ äquipollent sind.

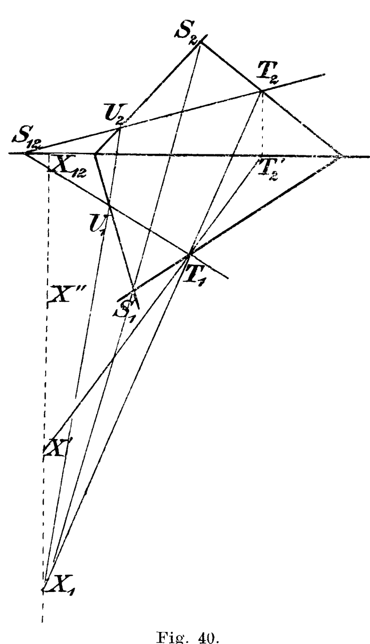


Fig. 40.

β) Oft erweist es sich auch als nützlich, eine Figur $\mathfrak{F}$ parallel zu einer beliebigen Richtung d auf die zweite Halbierungsebene zu projizieren. In diesem Falle nehmen wir einen beliebigen Punkt $P \equiv (P', P'')$ und lassen die durch P' und P'' zu d' bzw. d'' gezogenen Parallelen sich in P_0 schneiden. In diesem Punkt fallen offenbar die Horizontal-

1) Diese Aufgabe ist auch von einer praktischen Bedeutung, indem sie die Übersetzung der Aufgabe „drei lineare Gleichungen mit drei Unbekannten zu lösen", in die Sprache der Geometrie ist. Die folgende Lösung kann daher als graphische Lösung jener algebraischen Aufgabe angesehen werden (vgl. Nr. 50).

2) Damit ist der Fundamentalsatz von Desargues über perspektivische Dreiecke allgemein bewiesen.

und Vertikalprojektionen der Parallelprojektion von P auf die zweite Halbierungsebene zusammen. Von dieser besonderen Projektionsart kann man eine nützliche Anwendung machen[1]) auf folgende wichtige

Aufgabe: Den Punkt X zu finden, in welchem eine Strecke MN die innere Fläche eines durch seine Ecken A, B, C gegebenen Dreieckes trifft, vorausgesetzt, daß es einen solchen Punkt gibt.

Auflösung: Man projiziere die ganze gegebene Figur parallel zur Geraden BC auf die zweite Halbierungsebene (Fig. 41). B_0 und C_0 fallen zusammen und zwar in den Punkt $B'C' \cdot B''C''$, folglich reduziert sich die Projektion des gegebenen Dreiecks auf die Strecke A_0B_0. Wenn sich nun A_0B_0 und M_0N_0 in einem Punkte schneiden, der außerhalb auch nur einer der beiden Strecken liegt, so gibt es keinen Punkt, der die Aufgabe löst. Ist andernfalls X_0 der Schnittpunkt, so schneiden die durch X_0 zu $A'B'$ bzw. $A''B''$ gezogenen Parallelen die Strekken $M'N'$ bzw. $M''N''$ in den Punkten X' bzw. X''. Fällt nun X' innerhalb des Dreiecks $A'B'C'$ (oder X'' innerhalb $A''B''C''$), so erfüllt der Punkt $X \equiv (X', X'')$ alle Bedingungen der Aufgabe. Dies Verfahren benötigt nicht die Achse und ist offenbar auch zu verwenden, wenn die Strecke MN senkrecht zur Achse steht; man hat somit ein neues Verfahren, den Schnitt einer zur Achse senkrechten Geraden mit einer durch zwei sich schneidende Geraden bestimmten Ebene zu ermitteln. (Vgl. Nr. 24.)

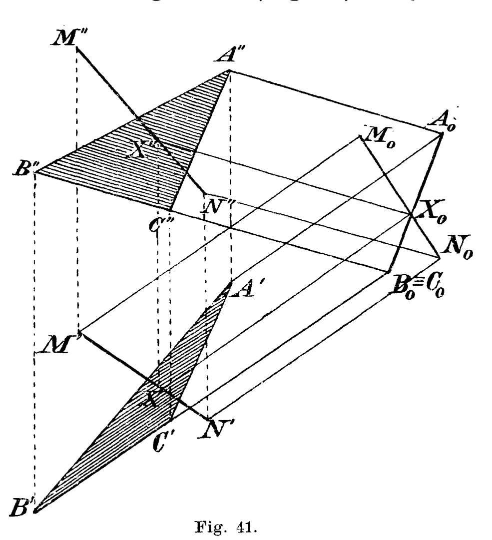


Fig. 41.

Zur Übung: Durch dasselbe Verfahren soll man (vorausgesetzt, daß sie existiert) die auf der Schnittlinie der Ebenen liegende gemeinsame Strecke zweier durch ihre Ecken gegebenen Dreiecke auffinden.

28. Nehmen wir an, es sei wieder eine Richtung durch eine feste Gerade $r \equiv (r', r'')$ gegeben und es soll parallel zu dieser ein Punkt P auf die Vertikalebene projiziert werden, so braucht man nur durch P die Parallele p zu r zu ziehen und ihren Spurpunkt mit der

1) G. Hauck, *Über uneigentliche Projektionen* (Sitz.-Ber. der Berliner math. Ges., I. Bd. 1902), S. 34—39.

Vertikalebene $\ddot{P}$ zu finden. Projiziert man in derselben Weise P', so entsteht der Punkt $\dot{P}$. Ist also die Gerade r gegeben, so erhält man für jeden Punkt $P \equiv (P', P'')$ zwei Punkte $\dot{P}$, $\ddot{P}$ auf derselben Ordinate (Fig. 42). Sind umgekehrt die beiden Punkte $\dot{P}$, $\ddot{P}$ beliebig auf derselben Ordinate gegeben und führt man diese Konstruktion in umgekehrter Weise aus, so kann man P', P'' finden und damit P; man kann also auch das Punktepaar $\dot{P}$, $\ddot{P}$ als Darstellung des Punktes P ansehen. Die so sich ergebende Darstellung heißt die Methode der schiefen Projektion mittels zweier senkrecht aufeinander stehender Projektionsebenen[1]).

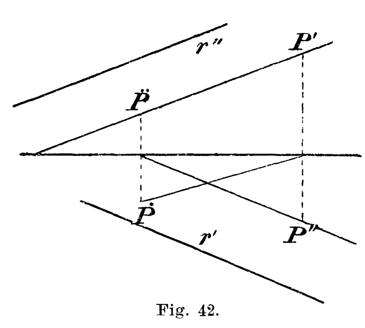


Fig. 42.

Ähnlich: Ist ein fester Punkt $C \equiv (C', C'')$ gegeben, und nimmt man nun einen beliebigen Punkt des Raumes $P \equiv (P', P'')$, so kann man sowohl den Spurpunkt in der Vertikalebene der Geraden CP, als auch den von CP' konstruieren; man erhält so zwei Punkte $\overline{P}$ und $\overline{\overline{P}}$, die auf derselben Ordinate liegen. Wählt man umgekekrt beliebig zwei derartige Punkte und führt die Konstruktion in umgekehrter Reihenfolge aus, so erhält man P', P'' und damit P. Damit hat man eine Methode der darstellenden Geometrie, die als zentrale Projektion mit Zuhilfenahme einer Grundebene bezeichnet wird[2]).

Zur Übung: Diese zwei neuen Darstellungsmethoden auf die Grundaufgaben der Geometrie der Lage anzuwenden.

29. Aufgabe. Gegeben die Geraden *a, b, c, d,* die zu je zweien sich schneiden: eine fünfte Gerade zu finden, die alle vier schneidet.

I. Lösung: Man projiziere von a und b als Achsen einen beliebigen Punkt M von c auf die Gerade d bezüglich als M_1 und M_2; sofern M_1 und M_2 zusammenfielen, so würde durch diesen Punkt auch die Schnittlinie jener beiden projizierenden Ebenen gehen, und daher wäre jener Schnitt in der Tat die gesuchte Gerade. Durchläuft nun M die Gerade c, so beschreiben M_1 und M_2 auf d zwei projektive Punktreihen; man suche deren Doppelpunkte X und Y auf; durch jeden von ihnen geht eine der Geraden, welche die Aufgabe lösen, die demnach vom zweiten Grade ist. — Um die bezügliche Zeichnung auszuführen, wählen wir beliebig drei Punkte M, N, P auf der Ge-

1) Peschka, *Darstellende und projektive Geometrie,* I. Bd., Wien 1889, Kap. IX.

2) O. a. W., Kap. XVIII.

raden c, und suchen eine der Projektionen (z. B. die horizontale) der entstehenden Punktepaare $M_1 M_2$, $N_1 N_2$, $P_1 P_2$; die Doppelpunkte der durch die Paare $M_1'M_2'$, $N_1'N_2'$, $P_1'P_2'$ bestimmten Projektivität seien X' und Y'. Daraus finden wir X'' und Y'' als Schnitt der zugehörigen Ordinate mit d'', und um die Lösung zu vervollständigen, braucht man nur noch durch X (oder Y) die Gerade x (oder y) zu ziehen, die a und b schneidet. Da alle angegebenen Konstruktionen nur Kombinationen der Fundamentalaufgaben sind, so können sie durch Zeichnung ausgeführt werden, jedoch ist die sich ergebende Lösung der Aufgabe langwierig; vorteilhafter ist jedoch folgende

II. Lösung[1]). Die drei Geraden a, b, c bestimmen eine Regelschar, die einer Fläche zweiten Grades $\mathfrak{F}$ angehört; diese wird von der Geraden d in zwei Punkten X, Y geschnitten und durch jeden von ihnen geht eine der Geraden x, y, da ja die Ebenen Xa, Xb, Xc alle durch eine Gerade gehen; dasselbe gilt von den Ebenen Ya, Yb, Yc; es kommt also nur auf die Auffindung der Punkte X, Y an.

Zu diesem Zwecke denken wir uns durch die Gerade d zwei beliebige Ebenen σ und τ gelegt; auf diesen bestimmen die Geraden a, b, c zwei Dreiecke, LMN, PQR, während die Fläche $\mathfrak{F}$ von ihnen in zwei Kegelschnitten Γ und Δ geschnitten wird, der erstere ist dem Dreiecke LMN, der letzere dem PQR umschrieben und beide gehen durch die gesuchten Punkte XY. Wir beachten nun, daß die beiden Kegelschnitte Γ und Δ Träger projektivischer Punktreihen sind, wenn man zwei Punkte als entsprechend ansieht, welche auf derselben Erzeugenden von $\mathfrak{F}$ liegen; sie bestimmen daher eine Projektivität zwischen den beiden Ebenen σ, τ derart, daß den Punkten L, M, N bzw. die Punkte P, Q, R entsprechen, und die Gerade d sich selbst. Nun entspricht in dieser Projektivität

dem Punkte $MN, d \equiv A_1$ der Punkt $QR, d \equiv A_2$,
„ „ $NL, d \equiv B_1$ „ „ $RP, d \equiv B_2$,
„ „ $LM, d \equiv C_1$ „ „ $PQ, d \equiv C_2$;

daher sind X, Y nichts anderes als die Doppelpunkte der durch die Punktepaare $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ auf d bestimmten Projektivität, und die Aufgabe ist, wie bei der ersten Lösung, zurückgeführt auf die Aufsuchung der Doppelpunkte zweier projektiver Punktreihen.

Bei dieser Lösung waren die beiden Ebenen σ, τ beliebig, wählt man diese in geeigneter Weise, so kann man sie noch vereinfachen. Die beste Wahl entspricht der Annahme, daß σ und τ die beiden

---

1) Der Grundgedanke derselben wurde angegeben von Timerding (*Über eine Aufgabe der darstellenden Geometrie;* Zeitschr. f. Math. u. Phys. XLVI, 1901); die Lösung selbst rührt her vom Verf. (*Le quadrisecanti di una quaterna di rette;* Periodico di Matematica per l'insegn. secondario B. XVII, 1902).



Ebenen sind, die die Gerade d auf die horizontale und vertikale Projektionsebene projizieren. Alsdann fällt (s. Fig. 43) die Horizon-

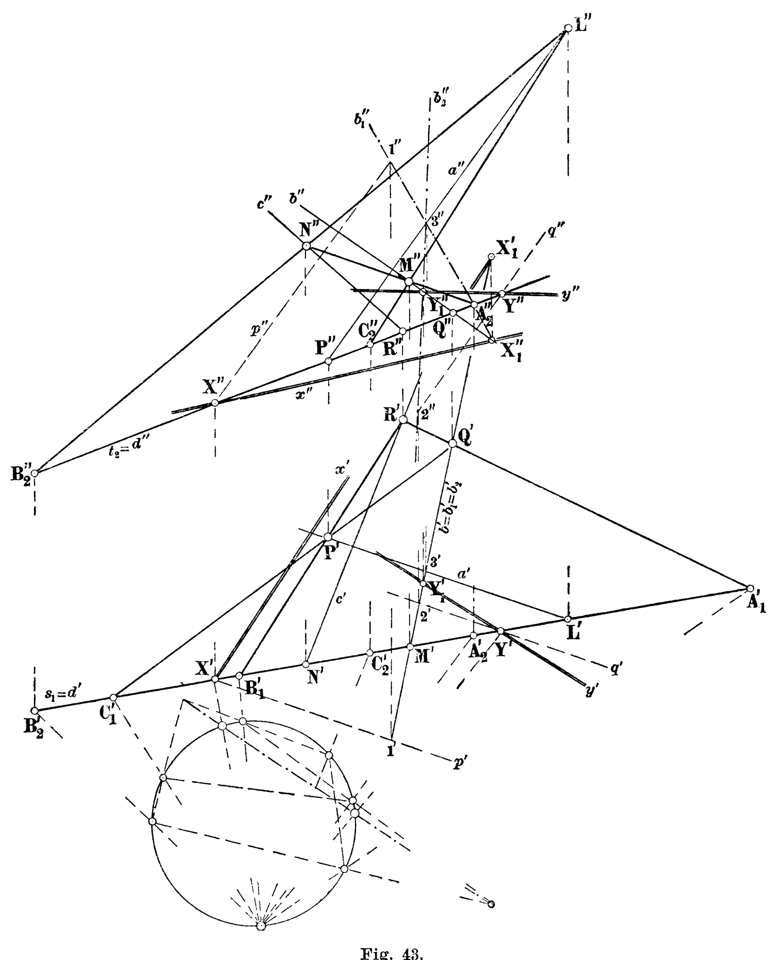


Fig. 43.

talspur s_1 von σ mit d' zusammen, und t_2 die Vertikalspur von τ mit d'' und dann ist offenbar

$$L' \equiv a'd', \quad M' \equiv b'd', \quad N' \equiv c'd',$$
$$P'' \equiv a''d'', \quad Q'' = b''d'', \quad R'' \equiv c''d'';$$

ferner sind

L'', M'', N'' die Schnittpunkte von a'', b'', c'' mit den Ordinaten von L', M', N',
P', Q', R' „ „ „ a', b', c' „ „ „ „ P'', Q'', R''.

Die Seiten des Dreiecks $P'Q'R'$ werden von d' in A_1', B_1', C_1' geschnitten, dagegen die des Dreiecks $L''Q''N''$ von d'' in A_2'', B_2'',

C_2''. Man bestimme nun auf d' A_2', B_2', C_2'. Alsdann sind X', Y' die Doppelpunkte der auf der Geraden d' durch die Punktepaare

$$A_1'A_2',\ B_1'B_2',\ C_1'C_2'$$

bestimmten Projektivität. Die entsprechenden Ordinaten liefern dann auf d'' die Punkte X'', Y''.

Nachdem man so die Punkte X, Y gefunden hat, kann man sich die gesuchten Geraden konstruieren, wie es in Nr. 25 angegeben ist, indem man berücksichtigt, daß beide a und b treffen müssen, und daß die eine durch X, die andere durch Y geht. Der Leser beachte auch die vielfachen Bestätigungen, die die entworfene Figur darbietet.

Achtes Kapitel.

Geraden und Ebenen, die zueinander senkrecht stehen.

30. Die Methoden, solche Aufgaben der darstellenden Geometrie zu lösen, in denen zueinander senkrecht stehende Geraden und Ebenen vorkommen, gründen sich auf einen schon (in Nr. 2) aufgestellten Satz, dem wir nunmehr folgende Fassung geben wollen:

Satz I: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Geraden aufeinander senkrecht stehen, ist die, daß die Orthogonalprojektionen auf eine zu der einen von ihnen parallele Ebene aufeinander senkrecht stehen.

Daraus können wir sofort eine wichtige Folgerung ziehen: Betrachten wir nämlich eine Gerade $g \equiv (g', g'')$ und eine Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$; ist g senkrecht zu τ, so ist sie es im Speziellen auch zu t_1 und t_2. Da nun die Ebene π_1 durch t_1 geht, so projizieren sich die beiden Geraden g und t_1 orthogonal auf π_1 als zwei zueinander senkrechte Geraden, indem nämlich g sich als g', t_1 sich in sich selbst projiziert. Ähnlich zeigt man, daß g'' senkrecht zu t_2 ist. Umgekehrt, wenn g' senkrecht zu t_1 und g'' senkrecht zu t_2, so ist g sowohl senkrecht zu t_1 als auch zu t_2 und damit auch zu der durch diese beiden Geraden bestimmten Ebene τ. Daher haben wir folgenden

Satz II: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Ebene τ senkrecht zu einer Geraden, ist, daß die Spuren von τ mit zwei zueinander senkrechten Ebenen senkrecht zu den Orthogonalprojektionen der Geraden auf jene beiden Ebenen seien.

Da die Horizontal- und Vertikalspur einer Ebene parallel zu den Hauptlinien der Ebene (s. Nr. 16) laufen, so können wir dem obigen Satze folgende allgemeinere Fassung geben:

Satz II': Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Gerade auf einer Ebene τ senkrecht steht, ist die, daß

ihre Horizontal- und Vertikalprojektion senkrecht zu den Horizontal- und Vertikalprojektionen zweier Hauptlinien seien, einer horizontalen und einer vertikalen.

Seien $\sigma \equiv [s_1, s_2]$ und $\tau \equiv [t_1, t_2]$ zwei zueinander senkrechte Ebenen, von denen τ auch zu π_1 senkrecht ist. Ziehen wir durch den Punkt $s_1 t_1$ die zu σ senkrechte Gerade x, so wird sie in τ enthalten und zu s_1 senkrecht sein; es ist daher $\sphericalangle\, x s_1 = \frac{\pi}{2}$, und daher (nach Satz I) $\sphericalangle\, x' s_1 = \frac{\pi}{2}$. Aber $x' \equiv t_1$, also:

Satz III: Sind die zwei Ebenen $\sigma \equiv [s_1 s_2]$ und $\tau \equiv [t_1 t_2]$ zueinander senkrecht und die erste auf π_1 (oder π_2) senkrecht, so ist $\sphericalangle\, s_1 t_1$ (oder $\sphericalangle\, s_2 t_2$) ein rechter Winkel.

Beachten wir auch noch eine unmittelbare Folgerung aus den eben dargelegten Sätzen. Es sei $\tau \equiv [t_1, t_2]$ eine beliebige Ebene; diejenigen Geraden in ihr, die senkrecht zu t_1 laufen, haben die Eigenschaft, mit der Ebene π_1 die größten bzw. kleinsten Winkel zu bilden. Daher heißen sie auch die Geraden größter bzw. kleinster Neigung gegen die Horizontalebene oder gewöhnlich die Fallinien der Ebene τ. Ist nun m eine solche Linie, so wird, da m senkrecht zu t_1 ist, ebenfalls m' senkrecht dazu sein. Auch m' ist eine beliebige zu t_1 senkrechte Gerade; man kann daraus m'' ableiten (vgl. Nr. 17). Ähnlich kann man auch die Fallinien der Ebene τ gegen die vertikale Projektionsebene π_2 betrachten; ist n eine solche, so ist auch n'' senkrecht zu t_2. Es mag bemerkt werden, daß man die Fallinien auch finden kann, wenn die betrachtete Ebene durch zwei sich schneidende Geraden bestimmt ist. Man kann nämlich in diesem Falle nach Nr. 16, II die Projektionen der horizontalen Hauptlinien (h) und der vertikalen (k) finden; da nun die Geraden h' parallel zu t_1, die k'' parallel zu t_2 sind, so folgt, daß die Geraden m' senkrecht zu h', die n'' senkrecht zu den k'' sein müssen.

Eine Ebene ist bestimmt, wenn eine ihrer Fallinien $m \equiv (m', m'')$ gegen die horizontale (oder vertikale) Projektionsebene **gegeben ist.** Sind nämlich M_1 und M_2 die Spurpunkte von m, so ist die erste Spurlinie s_1 der gesuchten Ebene die durch M_1 zu m' gezogene Senkrechte, die zweite Spur ist die Verbindungslinie von M_2 mit dem Punkte, in welchem s_1 die Achse schneidet.

31. Die folgenden fünf Aufgaben können für das hier zu behandelnde Gebiet als Fundamentalaufgaben gelten (vgl. Nr. 21, zweite Fußnote).

I. Von einem Punkte auf eine Ebene das Lot zu fällen.

Auflösung: Ist der Punkt durch seine Projektionen P', P'' und

die Ebene durch ihre Spuren s_1, s_2 gegeben (Fig. 44), so werden die von P' und P'' auf s_1 und s_2 gefällten Lote die Projektionen n' und n'' der gesuchten Geraden sein. Ist dagegen die Ebene durch zwei ihrer Geraden gegeben, so suche man zuerst (Nr. 16, II) die Projektionen zweier Hauptlinien, einer horizontalen h und einer vertikalen k; die von P' bzw. P'' auf h' bzw. k'' gefällten Lote sind die Projektionen der gesuchten Geraden.

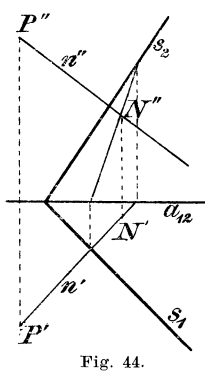


Fig. 44.

Die angegebene Lösung bedarf keiner Änderung, wenn der Punkt P auf der gegebenen Ebene liegt. Wenn man in dem allgemeinen Falle noch den Schnitt N der Geraden mit der Ebene (nach Nr. 24) bestimmt, so erhält man den Fußpunkt des von dem gegebenen Punkte auf die Ebene gefällten Lotes; wir sind also in den Stand gesetzt, eine beliebige Figur auf irgend eine Ebene des Raumes senkrecht zu projizieren.

Anmerkung. Die Punkte P' und N' liegen auf derselben Senkrechten zur horizontalen Spurlinie s_1 der Ebene τ. Sind daher außer der Ebene τ die beiden Punkte N' und P' beliebig auf einer zu s_1 senkrechten Geraden gegeben, so kann man N'' und damit P'' auffinden, wodurch der Punkt P bestimmt ist. Hieraus ergibt sich, daß man das Punktepaar P', N' als Darstellung des Punktes P ansehen kann. Daraus entsteht dann eine neue Darstellungsmethode für die Punkte des Raumes, welche als **Orthographische Parallelperspektive** bezeichnet wird[1]).

Zur Übung: I. Die Aufgabe I zu lösen für den Fall, daß die gegebene Ebene durch die Achse geht (mit Hilfe der Seitenrißebene). **II.** Die Höhen eines durch seine Ecken gegebenen Tetraeders zu konstruieren.

II. Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, die senkrecht zu einer gegebenen Geraden ist.

Auflösung: Es sei (Fig. 45) $r \equiv (r', r'')$ die gegebene Gerade, $P \equiv (P', P'')$ der gegebene Punkt. Die Spuren der gesuchten Ebene müssen bzw. senkrecht sein zu r' und r''. Demnach werden die durch P' senkrecht zu r' gezogene Gerade h' und die durch P'' zur Achse parallele h'' die Projektionen der durch P gehenden horizontalen Hauptlinie der gesuchten Ebene sein. Wir bestimmen nun deren vertikalen Spurpunkt H_2, durch ihn muß die vertikale Spur s_2 jener

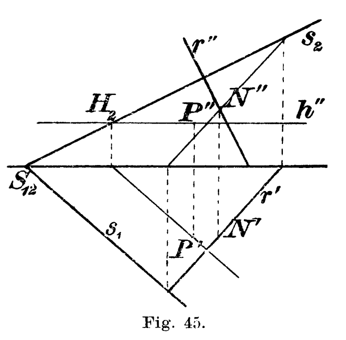


Fig. 45.

1) Peschka, o. a. W., Kap. X.

Ebene geben, somit ist s_2 das von H_2 auf r'' gefällte Lot. Schneidet nun s_2 die Achse in S_{12}, so liefert das von S_{12} auf r' gefällte Lot die Spur s_1.

Die angegebene Lösung bedarf keiner Änderung für den Fall, daß P auf der Geraden g liegt. Wenn man in dem allgemeinen Falle den Schnitt von g mit der gefundenen Ebene bestimmt (Nr. 24), so hat man **den Fußpunkt des von einem Punkte auf eine gegebene Gerade gefällten Lotes.**

Zur Übung: I. Die vorige Aufgabe zu lösen (mit Hilfe der Seitenrißebene), wenn die gegebene Gerade senkrecht zur Achse ist. **II.** In einem Punkte einer Geraden diejenige Senkrechte zu errichten, die eine andere Gerade trifft. **III.** Den Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel für ein Tetraeder zu finden, das durch seine Ecken bestimmt ist.

III. Von einem gegebenen Punkte auf eine Gerade das Lot zu fällen.

Auflösung: Es seien $P \equiv (P', P'')$ und $g \equiv (g', g'')$ die gegebenen Elemente. Legen wir durch P die zu g senkrechte Ebene π und bestimmen den Schnittpunkt $N \equiv \pi g$, so ist PN das gesuchte Lot. Da nun π senkrecht zu g ist, so haben ihre horizontalen Hauptlinien ihre erste Projektion senkrecht zu g', und ihre vertikalen Hauptlinien haben ihre zweite Projektion senkrecht zu g'' (Fig. 46). Daher sind 1. die von P' auf g' gefällte Senkrechte und die durch P'' zur Achse gezogene Parallele Projektionen der durch P gehenden horizontalen Hauptlinie h von π, 2. die durch P' zur Achse gezogene Parallele und das von P'' auf g'' gefällte Lot die Projektionen der durch P gehenden vertikalen Hauptlinie k von π. Sind diese Linien gezogen, so ist π durch h und k bestimmt. Sucht man nun (nach Nr. 24a) deren Schnitt N mit g, so ist PN das gesuchte Lot x. Man beachte, daß man damit auch den Fußpunkt des Lotes hat.

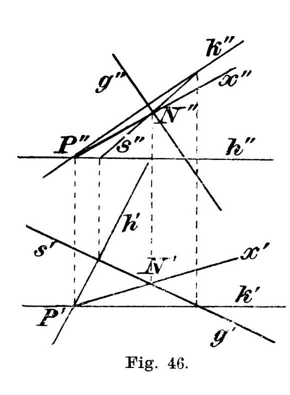


Fig. 46.

Zur Übung: I. Den Höhenpunkt und den Mittelpunkt des Umkreises zu finden für ein Dreieck, das durch seine Ecken bestimmt ist. **II.** Gegeben die beiden Projektionen einer Geraden g, die eines Punktes P auf ihr und endlich in der Horizontalebene eine Gerade p', die durch P' geht: man soll durch P'' eine Gerade p'' ziehen, derart daß p' und p'' die Projektionen einer zu g senkrechten Geraden werden.

IV. Durch eine Gerade die zu einer gegebenen Ebene senkrechte Ebene zu legen.

Auflösung: Von einem beliebigen Punkte der Geraden fälle man das Lot auf die gegebene Ebene; dies bestimmt zugleich mit

der gegebenen Geraden die gesuchte Ebene. Ihre Schnittlinie mit der gegebenen Ebene gibt die senkrechte Projektion der gegebenen Gerade auf diese.

Spezialfall. Ist (Fig. 47) die gegebene Gerade g senkrecht zur Horizontalebene und $\sigma \equiv [s_1 s_2]$ die gegebene Ebene, so wird die gesuchte Ebene $[x_1, x_2]$ vertikal sein; ihre erste Spurlinie wird (nach Nr. 30, Satz III) durch den Punkt $P' \equiv g'$ gehen und zu s_1 normal sein; damit ist x_1 bestimmt; x_2 wird die im Punkte $X_{12} \equiv x_1 a_{12}$ zu a_{12} senkrechte Gerade sein.

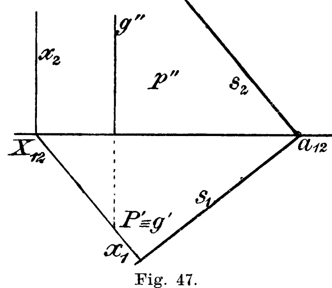


Fig. 47.

32. V. Für zwei windschiefe Geraden das gemeinsame Lot zu konstruieren (Fig. 48).

Auflösung: Es seien $g \equiv (g', g'')$ und $l \equiv (l', l'')$ die gegebenen Geraden. Durch einen beliebigen Punkt P von g ziehen wir die Parallele zu l, nämlich l_1. Da das gesuchte Lot x sowohl senkrecht zu g als auch zu l sein muß, so wird es dies auch zu g und l_1 sein, demnach wird es parallel laufen zu der in P auf der Ebene gl_1 errichteten Senkrechten u. Wir bestimmen nun die Ebene der beiden Geraden g, u und suchen deren Schnittpunkt L mit der Geraden l; die durch L zur Geraden u gezogene Parallele x liegt in der genannten Ebene gu, trifft daher auch die Gerade g in einem Punkte G. Sie erfüllt somit die Bedingungen der Aufgabe. Die angegebene Konstruktion ist nun in der Zeichnung vollständig ausführbar. Die Punkte P', P'' braucht man auf g' und g'' nur so zu wählen, daß sie auf derselben Ordinate liegen; die durch sie bzw. zu l' und l'' gezogenen Parallelen sind die Projektionen von l_1. Nun bestimmen wir von der Ebene gl_1 eine horizontale Hauptlinie h und eine vertikale k; die von P', P'' auf h' bzw. k'' gefällten Lote sind u' bzw. u''. Jetzt suchen wir (nach Nr. 24a) den Punkt L, in welchem l die Ebene gu trifft. Die durch $L'L''$ bzw. zu $u'u''$ gezogenen Parallelen sind die Projektionen x', x''

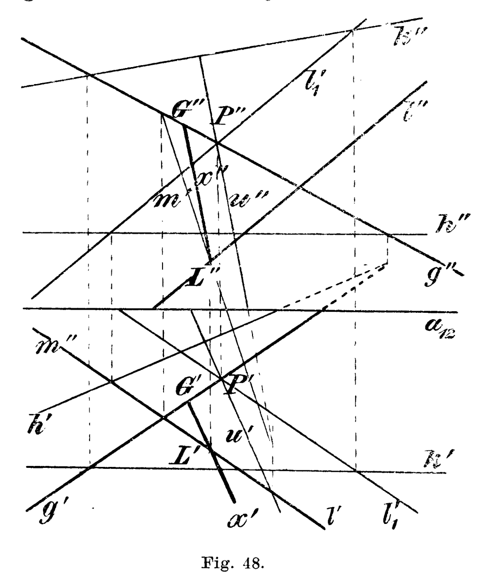


Fig. 48.

des gesuchten Lotes. Als Kontrolle beachte man, daß die Punkte $g'x'$, $g''x''$ auf derselben Ordinate liegen müssen.

Spezialfälle. Die angegebene Konstruktion vereinfacht sich, wenn die gegebenen Geraden besondere Lagen in bezug auf die Projektionsebene haben. Besondere Erwähnung verdienen folgende Fälle.

I. Wenn die Geraden g, l parallel zur Horizontalebene sind, projiziert sich das gesuchte Lot horizontal in den Punkt $g'l'$ und vertikal in die von diesem Punkte auf die Achse gefällte Senkrechte.

II. Ist eine der Geraden, z. B. g, senkrecht zur Horizontalebene, so ist die gesuchte Gerade, die ja senkrecht zu g sein muß, parallel zu dieser Ebene. $\widehat{lx}$ ist also ein rechter Winkel mit einem horizontalen Schenkel, folglich ist auch $\widehat{l'x'}$ ein Rechter. Wenn man also vom Punkte g' auf l' das Lot fällt, so bekommt man x', und die durch den Punkt $L' \equiv l'x'$ gehende Ordinate trifft l'' in L''; die durch L'' zur Achse gezogene Parallele ist dann x''.

Zur Übung: I. Mit Hilfe der obigen Bemerkung und mit Benutzung der Seitenrißebene das gemeinsame Lot auf zwei Geraden zu konstruieren, von denen eine zur Achse parallel läuft. **II.** Wie läßt sich die obige Aufgabe lösen, wenn wenigstens eine der beiden Geraden senkrecht zur Achse ist?

33. Die zu Anfang dieses Kapitels aufgestellten Sätze führen auch zur Lösung weiterer Aufgaben, die wegen der vielfachen Anwendungen, deren sie fähig sind, große Bedeutung haben[1]).

VI. Zwei sich schneidende Geraden r, s sind durch ihre Projektionen gegeben, man soll die Halbierungslinien der von ihnen gebildeten Winkel konstruieren.

Auflösung: Die gesuchten Geraden sind zueinander senkrecht und harmonisch zugeordnet in bezug auf die beiden Geraden r, s. Sie sind also die gemeinsamen Strahlen der Involution I, die r und s als Doppelstrahlen hat, und der zirkularen Strahlen-Involution C, die den Punkt $A \equiv rs$ als Mittelpunkt und als Ebene $\alpha \equiv rs$ hat. Nun hat α als Affinitätsachse die Verbindungslinie der Punkte $R_0 \equiv r'r''$ und $S_0 \equiv s's''$, und die beiden Projektionen eines beliebigen Strahles des Büschels $(A\alpha)$ sind zwei Geraden, die durch A' und A'' gehen und sich auf jener Achse schneiden. In diesem Büschel gibt es einen Strahl m (Fig. 49), der parallel zur Horizontalebene läuft; seine zweite Projektion ist der durch A'' zur Achse parallel gezogene Strahl m''; daraus ergibt sich leicht mit Hilfe der schon gezeichneten Affinitätsachse m'. Ferner gibt es in jenem Büschel einen Strahl n, der senkrecht zu m ist; da nun der rechte Winkel $\widehat{mn}$ den einen Schenkel

1) M. s. den Aufsatz des Verf. *Rette bisettrici e piani bisettori* (Period. di matem. par l'insegn. second., 3. Reihe, II. Band 1904—05, S. 41.



horizontal hat, so ist (vgl. Nr. 30) seine Horizontalprojektion ebenfalls ein Rechter; n' ist also die zu m' in A' errichtete Senkrechte, woraus sich dann n'' sogleich ergibt. In genau derselben Weise konstruiere man die Projektionen des rechten Winkels $\widehat{pq}$ des Büschels $(A\alpha)$, dessen einer Schenkel p parallel zur Vertikalebene läuft. Nun

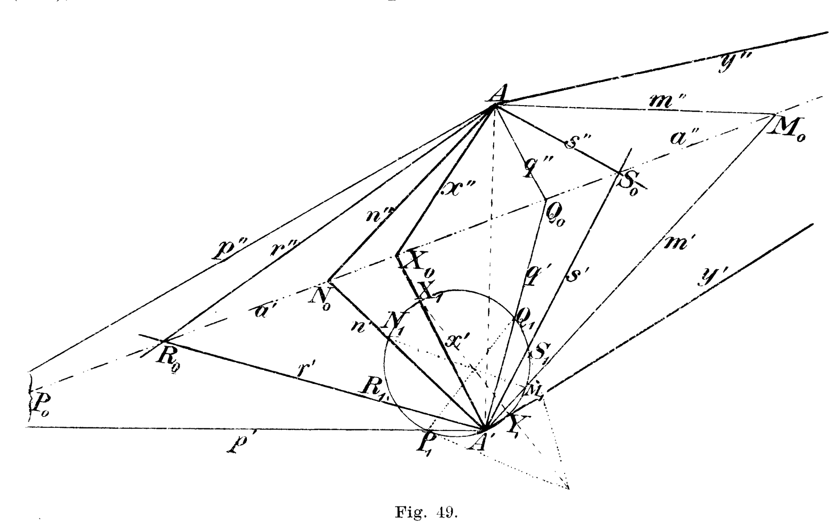


Fig. 49.

projiziert sich die zirkulare Involution C offenbar in die (elliptische) C', die durch die Paare $m'n'$, $p'q'$ bestimmt ist, während die (hyperbolische) Involution I sich in die hyperbolische I' projiziert, die r' und s' als Doppelstrahlen hat. Die den beiden Involutionen I' und C' gemeinsamen Strahlen x', y' sind die Projektionen der gesuchten Halbierungslinien x, y; hieraus ergeben sich x'', y'' und die Aufgabe ist gelöst. — Beachtenswert ist, daß man für die Lösung die Achse selbst nicht nötig hat, weshalb sie auch in Fig. 49 ausgelassen wurde. — Es erübrigt noch einiges zu sagen über den Fall, daß eine der beiden Geraden (r) senkrecht zur Achse liegt. Sie sei dann durch die Punkte $A \equiv (A', A'')$, $B \equiv (B', B'')$ bestimmt, wobei angenommen ist, daß A', A'', B', B'' auf derselben Ordinate liegen. s soll durch seine Projektionen s', s'' bestimmt sein, jedoch so, daß s' durch A', also s'' durch A'' geht. Der Punkt $S_0 \equiv s's''$, verbunden mit dem Punkte R_0, in welchem r die zweite Halbierungsebene trifft (vgl. Nr. 12), liefert dann die Affinitätsachse der Ebene rs; ist die Konstruktion bis zu diesem Punkte gediehen, so kann man fortfahren wie im allgemeinen Falle. Für den Fall, daß die beiden gegebenen Geraden in derselben zur Achse senkrechten Ebene liegen, wird man am besten tun, eine Seitenrißebene zu Hilfe zu nehmen, und zwar kann man als solche die Ebene rs selbst wählen.

Anmerkung: In ganz analoger Weise kann man folgende Aufgabe lösen, von der die vorhergehende nur ein ganz spezieller Fall ist: **Von einem Kegelschnitt Γ, der durch seine Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$ und die erste (oder zweite) Projektion von 5 seiner Punkte gegeben ist, die Achsen zu bestimmen.**

Da die Projektion des Mittelpunktes von Γ die Mittelpunkte von Γ', Γ'' sind, so kann man sie durch zweimalige Anwendung eines aus der projektiven Geometrie bekannten Verfahrens bestimmen. Ferner sind die gesuchten Achsen die den zwei Involutionen gemeinsamen Strahlen, d. h. 1. der Involution I, die von den konjugierten Durchmessern von Γ gebildet wird, 2. der zirkularen Involution C, die ihr Zentrum im Mittelpunkte von Γ hat. Da nun die Horizontalprojektion von I nämlich I′, die Involution der konjugierten Durchmesser von Γ' ist, so kann man sie durch ein bekanntes Verfahren konstruieren, während um C′ zu konstruieren das oben dargelegte Verfahren dienen kann. Die I′ und C′ gemeinsamen Strahlen sind die ersten Projektionen der gesuchten Achsen, aus denen man die zweiten leicht ableiten kann.

Zur Übung: Ein Dreieck ist durch die Projektionen seiner Ecken gegeben. Man soll den Mittelpunkt des Inkreises finden.

34. VII. Gegeben zwei Ebenen $\sigma \equiv [s_1 s_2]$, $\tau \equiv [t_1 t_2]$: man bestimme die Halbierungsebenen der von ihnen gebildeten Flächenwinkel. (Fig. 50).

Auflösung: Die gesuchten Ebenen und die gemeinsamen Elemente von zwei Involutionen in dem Ebenenbüschel, welches die Gerade $a \equiv \sigma\tau$ zur Achse hat, nämlich 1. von der entsprechenden zirkularen Involution C, 2. der Involution I, die σ und τ als Doppelebenen hat. Nun wird die zweite Involution von den Projektionsebenen in den beiden Involutionen I_1 und I_2 geschnitten, die s_1, t_1 bzw. s_2, t_2 als Doppelstrahlen haben, während C von ihnen in den beiden elliptischen Involutionen C_1 und C_2 geschnitten wird, die wir nunmehr charakterisieren wollen. Wir bestimmen die Spurpunkte T_1 und T_2 sowie die Projektionen a' und a''

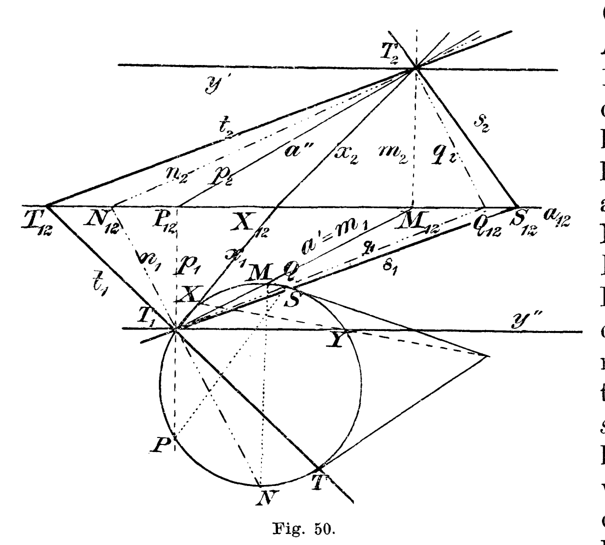


Fig. 50.

der Geraden $\sigma\tau$. Betrachten wir jetzt die Ebene $\mu \equiv [m_1, m_2]$ die a auf die Horizontalebene projiziert, so fällt m_1 mit a' zusammen, während m_2, nach Nr. 30 Satz III, senkrecht zur Achse läuft. Betrachten wir ferner die Ebene $\nu \equiv [n_1, n_2]$, die durch a senkrecht zu μ geht, so ist n_1 die in T_1 zu m_1 errichtete Senkrechte, woraus sich n_2 ergibt.

Nun ist $m_1 n_1$ ein Paar der Involution C_1, dagegen $m_2 m_2$ von C_2. Ein zweites Paar von C_1 erhält man nun durch Betrachtung der Ebene, die a auf die Vertikalebene projiziert und der durch a dazu senkrecht gehenden Ebene. Jetzt suchen wir die der Involution C_1 (die durch die Paare $m_1 n_1$, $p_1 q_1$ bestimmt ist) und der I_1 (die s_1, t_1 als Doppelstrahlen hat) gemeinsamen Strahlen auf; sie werden die ersten Spurlinien x_1, y_1 der gesuchten Ebenen sein, woraus sich dann die zweiten Spuren leicht ergeben. In dem Falle, daß eine der beiden gegebenen Ebenen durch die Achse geht, ist, nachdem die Schnittlinie (vgl. Nr. 22a) gefunden worden, der übrige Teil der obigen Lösung im wesentlichen noch anwendbar. Wenn jedoch beide Ebenen durch die Achse gehen, ist es ratsam, zur Lösung die Seitenrißebene herbeizuziehen.

Zur Übung: I. Ein Tetraeder sei durch die Projektionen seiner Ecken bestimmt: man suche die Mittelpunkte der Kugeln, welche alle vier Seitenflächen berühren.[1] **II.** Zu beweisen: 1. Wenn eine Gerade mit zwei anderen r, s, die als durch denselben Punkt O gehend angenommen werden können, unter sich gleiche Winkel bildet, so ist sie parallel zu einem Strahle eines der beiden Büschel, die O als gemeinsames Zentrum und als Ebenen die durch O senkrecht zu den Halbierungslinien des Winkels $\widehat{rs}$ gelegten Ebenen haben. 2. Wenn eine Ebene mit zwei anderen ρ, σ einander gleiche Winkel bildet, so ist sie parallel zu einem Elemente eines der beiden Büschel, die als Achsen die durch einen beliebigen Punkt der Geraden $\rho\sigma$ zu den Halbierungsebenen der Flächenwinkel gelegten Senkrechten haben. — **III.** Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, die mit drei anderen Geraden gleiche Winkel bildet, oder eine Ebene zu legen, die mit drei gegebenen Ebenen gleiche Flächenwinkel bildet. Wie viele Lösungen haben diese beiden Aufgaben?

Neuntes Kapitel.

Umlegungen und ihre Anwendung bei der Lösung metrischer Aufgaben.

35. Nachdem wir das Verfahren angegeben haben, die Probleme der reinen Geometrie der Lage zu lösen, sowie solche, bei denen die Bedingung des Senkrechtstehens auftritt, erübrigt noch, uns mit jenen Problemen zu befassen, bei denen unter den gegebenen oder gesuchten

1) Die Aufgabe hat wenigstens 8 Lösungen. Eine Diskussion, die die Sache in eleganter Weise erschöpft, findet sich in Catalan, *Traité élém. de géom. descriptive,* I. Partie (Paris 1851) S. 63. ff.



Stücken Strecken oder Winkel auftreten, d. h. mit den Problemen der metrischen Geometrie. Der Kunstgriff zu dem man im allgemeinen seine Zuflucht nimmt, um diese zu lösen, besteht darin, daß man in geeigneter Weise die Lage, die die gegebenen Stücke der Aufgabe in bezug auf die Projektionsebene haben, verändert. Die einfachste und wohl die fruchtbarste Art, in welcher sich dieser Kunstgriff darbietet, besteht darin, daß man die betreffenden Ebenen um ihre horizontale (vertikale) Spurlinie sich drehen läßt, bis sie mit der der Horizontal-(Vertikal-)Ebene zusammenfallen.

Diese Operation nennt man Umlegung (oder Umklappung). Die entgegengesetzte Operation, die darin besteht, daß man die betreffenden Ebenen wieder in ihre ursprüngliche Lage bringt, wollen wir Wiederaufrichten (Zurückklappen) nennen. Wir wollen nun die Umlegungen einer Figur $\mathfrak{F}$, die die Projektionen $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ hat, mit $(\mathfrak{F})$, oder $(\mathfrak{F})^*$, $(\mathfrak{F})_1 \ldots$ bezeichnen.

Es sei nun $\tau \equiv (t_1, t_2)$ eine Ebene, die weder parallel noch senkrecht zu einer der Projektionsebenen ist, noch auch durch die Achse geht, P' und $''P$ die Projektionen eines beliebigen Punktes P von τ auf π_1 und π_2. Bei der Drehung von τ um ihre horizontale Spur t_1 beschreibt der Punkt P einen Kreisbogen, der in der durch P senkrecht zu t_1 gelegten Ebene liegt, und dessen Mittelpunkt der Schnitt H dieser Ebene mit t_1, und dessen Radius der Abstand $\overline{PH}$ ist. Zufolge eines bekannten Satzes ist nun H der Fußpunkt des von P' auf t_1 gefällten Lotes, andererseits ist der Abstand $\overline{PH}$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, das die Strecken $\overline{P'H}$ und $\overline{PP'} = \overline{''PP_{12}} = \overline{P''P_{12}}$ als Katheten hat, das ist den Abstand der Horizontalprojektion des betrachteten Punktes von der ersten Spur der sich drehenden Ebene und den Abstand der Vertikalprojektion des betrachteten Punktes von der Achse. Infolgedessen wird nach vollzogener Drehung der Punkt P auf die Gerade HP' fallen in einer Entfernung von H, die gleich ist der Strecke $\overline{HP}$, und zwar nach der einen oder der anderen Seite, je nachdem die Rotationsbewegung in dem einen oder entgegengesetzten Sinne ausgeführt wird.

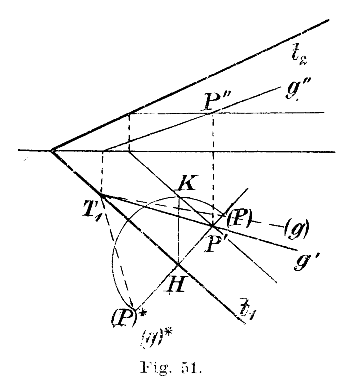


Fig. 51.

Diese Bemerkungen gestatten uns nun leicht die Umlegung eines beliebigen Punktes der Ebene τ in der Horizontalebene zu finden, wenn man eine der beiden Projektionen kennt (Fig. 51). Man bestimme zuerst (nach Nr. 17) die andere Projektion. Dann fälle man von P' das Lot $P'H$ auf t_1 und nehme auf der

durch P' zu t_1 gezogenen Parallelen die Strecke $\overline{P'K} = \overline{P''P_{12}}$. Dann beschreiben wir mit $\overline{HK}$ um H einen Kreis; dieser schneidet die Gerade HP' in den Punkten (P) und $(P)^*$, die beide die Umlegung des Punktes P sind.

Um die Umlegung einer Geraden g einer Ebene τ zu finden, verbindet man die Umlegung zweier beliebiger Punkte von g. Die Konstruktion läßt sich vereinfachen, wenn man die Punkte zweckmäßig wählt. Da nun der erste Spurpunkt T_1 von g ein Punkt der Drehungsachse ist und als solcher unverändert bleibt, so geht sowohl die Umlegung von g als auch von g' durch T_1. Die Umlegung von g ist also die Gerade (g), die den Schnittpunkt $g't_1$ mit der Umlegung irgend eines anderen Punktes P von g verbindet (s. vorige Figur).

Aus dem Gesagten ergibt sich, wie man die Umlegung einer beliebigen Figur $\mathfrak{F}$ der Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$, die durch eine ihrer Projektionen gegeben ist, in eine der Projektionsebenen finden kann. In dem bislang ausgeschlossenen Falle, daß τ senkrecht etwa zur Horizontalebene steht, müßte $\mathfrak{F}$ durch seine Vertikalprojektion gegegeben sein (s. Nr. 17). P fällt dann auf t_1, ebenso H', daher ist die Strecke $\overline{PH} = \overline{PP'} = \overline{P''P_{12}}$; die angegebene Konstruktion vereinfacht sich dann ohne ihre Natur zu ändern. Was die Umlegung einer Geraden angeht, so findet man diese am besten, wenn man T_1 mit (T_2), der Umlegung von T_2 verbindet. — In dem Falle, daß τ durch die Achse geht, ist die Umlegung eines Punktes $P \equiv (P', P'')$ ein Punkt (P) der entsprechenden Ordinate, und es ist $P_{12}(P)$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $P'P_{12}$ und $P''P_{12}$. — In dem Falle schließlich, daß τ parallel zu π_1 ist, wird die Umdrehungsachse unendlich fern, und die Umlegung auf π_1 geht in eine Parallelverschiebung senkrecht zu π_1 über; die Umlegung fällt mit der entsprechenden Horizontalprojektion zusammen.

36. Wir nehmen wieder den Fall auf, daß die Ebene τ weder senkrecht noch parallel zu π_1 sei; dann besteht zwischen $(\mathfrak{F})$ und $\mathfrak{F}'$ eine bemerkenswerte geometrische Beziehung. Zwei entsprechende Punkte (P) und P' liegen auf derselben Senkrechten zur Spurlinie t_1 der umgelegten Ebene, und zwei entsprechende Geraden (g) und g' schneiden sich auf dieser. Folglich sind $(\mathfrak{F})$ und $\mathfrak{F}'$ perspektive Figuren, indem t_1 Achse, und der in senkrechter Richtung zu t_1 unendlich fern liegende Punkt Zentrum der Perspektivität ist; letztere ist also eine zu t_1 senkrechte Affinität. Um sie festzulegen, muß man irgend ein Paar entsprechender Punkte kennen (das man nach dem obigen direkt konstruieren kann) oder das Affinitätsverhältnis; dies wird gegeben durch den absoluten Wert des Verhältnisses

$$\frac{\overline{P'H}}{(P)H} = \frac{\overline{P'H}}{\overline{PH}} = \cos PHP' = \cos(\tau, \pi_1),$$



wo (τ, π_1) einer der von den Ebenen τ und π gebildeten Winkel ist. Diese Beziehung kann man auch mit Berücksichtigung des Vorzeichens gelten lassen, indem man festlegt, daß, wenn (τ, π_1) den spitzen Winkel der beiden Ebenen bedeutet, man als Umlegung des Punktes P denjenigen der beiden Punkte (P), $(P)^*$ wählt, der in bezug auf t_1 auf derselben Seite liegt wie P'; wenn man also für das Symbol (τ, π_1) die obige Bedeutung beibehält, so kann man die folgenden Beziehungen, die auch in bezug auf die Vorzeichen gültig bleiben, aufstellen:

$$\frac{\overline{P'H}}{\overline{(P)H}} = \cos(\tau, \pi_1); \quad \frac{\overline{P'H}}{\overline{(P)^*H}} = -\cos(\tau, \pi_1).$$

Diese Beziehungen können offenbar auch dann aufrecht erhalten bleiben, wenn τ senkrecht zu π_1 steht, indem dann $\sphericalangle(\tau, \pi_1) = \frac{\pi}{2}$; alsdann hat man eine entartete Affinität. Im allgemeinen kann man jedoch aufstellen den folgenden

Satz: Wenn man eine zu einer Projektionsebene nicht parallele Ebene in diese umlegt, so besteht zwischen der Umlegung und der entsprechenden Projektion einer beliebigen Figur eine orthogonale Affinität, deren Achse die Spurlinie der umgelegten Ebene ist und deren Affinitätsverhältnis der Kosinus des Winkels ist, den die Ebene bei der Umlegung beschreibt.

Die Wichtigkeit dieses Satzes ergibt sich, wenn man bedenkt, daß er jedes Problem der Umlegung und Wiederaufrichtung auf ein solches der Affinität zurückführt.

Anmerkung: Bei der Umlegung einer Ebene τ auf eine der Projektionsebenen, z. B. π_1, kann es vorkommen, daß sie Punkte M mit sich führt, die außerhalb derselben liegen, aber unveränderlich mit ihr verbunden sind. Diese nehmen dann eine neue Lage an, die man folgendermaßen finden kann: Wir fällen von M das Lot MN auf τ und bestimmen (s. Nr. 37) die Länge von $\overline{MN}$; nun bestimmen wir die Umlegung (N) des Fußpunktes N, alsdann ist (N) die erste Projektion der neuen Lage (M) von M; die zweite Projektion finden wir dann, indem wir beachten, daß seine horizontale Kote den absoluten Wert $\overline{MN}$ hat. Wir fällen daher von (N) auf die Achse das Lot und tragen auf diesem vom Fußpunkte aus $\overline{MN}$ ab, nach der einen oder anderen Seite, je nach der Lage von M oder der Drehrichtung von τ; der Endpunkt liefert die zweite Projektion von (M).

37. Wir gehen nun dazu über, einige Anwendungen der Umlegung auf metrische Probleme anzuführen. Zuvor sei jedoch bemerkt, daß diese auf dem Umstande beruhen, daß durch Umlegung die Länge einer Strecke, sowie die Größe eines Winkels un-

verändert bleibt. Unter diesen Problemen gehören zu den Fundamentalaufgaben diejenigen, die die Bestimmung der Entfernung zweier Punkte, oder des Winkels zweier Geraden oder zweier Ebenen bezwecken.

Aufgabe I. Die Entfernung zweier, durch ihre Projektionen gegebener, Punkte zu bestimmen (Fig. 52).

Auflösung. Es seien $A \equiv (A', A'')$, $B \equiv (B', B'')$ die beiden Punkte. Wir betrachten die Ebene τ, welche die Gerade $g \equiv AB$ auf π_1 projiziert; ihre Spurlinie t_1 fällt mit $g_1 \equiv A'B'$ zusammen. Legen wir nun τ in π_1 um und suchen die Lagen (A) und (B) die die Punkte A und B dann annehmen, so ist $\overline{(A)(B)}$ gleich der gesuchten Entfernung. Um jene Punkte zu finden, errichten wir in A' und B' die Senkrechten zu t_1 und müssen auf diesen $\overline{A'(A)} = \overline{A_{12}A''}$, $\overline{B'(B)} = \overline{B_{12}B''}$ abtragen, und zwar auf derselben Seite von t_1 oder auf verschiedenen, je nachdem die Punkte A, B Koten von gleichem oder verschiedenem Vorzeichen haben. Zur Kontrolle der Zeichnung beachte man, daß die Gerade $(A)(B)$, als Umlegung der Geraden g auf die Horizontalebene, durch den ersten Spurpunkt derselben gehen muß. — Unsere Konstruktion wird unbrauchbar, wenn die Gerade AB senkrecht zur Achse steht; da dann AB parallel zur Seitenrißebene, so ist: $\overline{AB} = \overline{A'''B'''}$; um die Aufgabe zu lösen, hat man also nur den Seitenriß zu konstruieren.

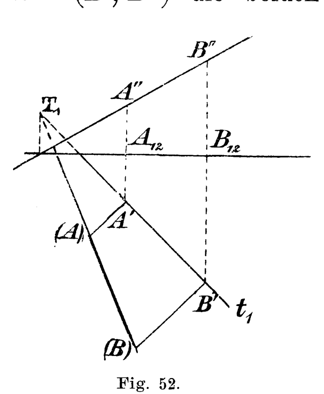


Fig. 52.

Folgesatz: Zieht man $(A)H$ parallel zu t_1, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, aus welchem mit Rücksicht auf die vorige Konstruktion sich ergibt:

$$\overline{AB} = \overline{(A)(B)} = \sqrt{\overline{(A)H}^2 + \overline{(B)H}^2} = \sqrt{\overline{A'B'}^2 + (\overline{(B)B'} - \overline{(A)A'})^2}$$
$$= \sqrt{\overline{A'B'}^2 + (\overline{B''B_{12}} - \overline{A''A_{12}})^2}.$$

In Worten: **Die Entfernung zweier Punkte**, deren Projektionen gegeben sind, **ist Hypotenuse eines Dreiecks, dessen Katheten die Entfernung der ersten (zweiten) Projektionen und der absolute Wert der Differenz zwischen ihren Horizontal- (Vertikal)-Koten** sind. Daraus folgt (ohne Hilfe des Satzes I in Nr. 2), daß nur diejenigen Strecken sich in ihrer wahren Größe projizieren, die auf einer zur Bildebene parallelen Geraden liegen.

Übungsaufgaben: I. Welchen Abstand haben zwei Punkte, die im Grundriß (oder Aufriß) zusammenfallen? — **II.** Man bestimme die kürzeste Entfernung zwischen zwei windschiefen Geraden, deren Projektionen man kennt (vgl. Nr. 32).

In gewissem Sinne die Umkehrung der vorigen ist die folgende

Aufgabe II. Gegeben die Projektionen g', g'' einer Geraden g und die A', A'' eines Punktes A auf ihr: die eines Punktes X auf ihr zu finden, so daß die Strecke AX die gegebene Länge l hat. (Fig. 53).

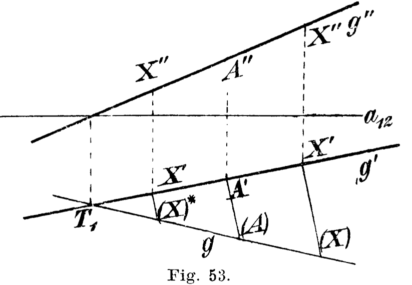


Fig. 53.

Auflösung. Wir legen auch hier die Ebene, die g auf die Grundrißebene projiziert in diese um, und zeichnen die Umlegung (A) des Punktes A sowie den Spurpunkt T_1 von g, dann ist die Gerade $T_1(A) \equiv (g)$. Auf ihr tragen wir von (A) aus nach beiden Seiten die Strecke l ab, die so erhaltenen Punkte (X), $(X)^*$ sind die Umlegungen der beiden gesuchten Punkte. Fällen wir von ihnen die Lote auf g', so erhalten wir die ersten Projektionen, und aus diesen leicht die zweiten dieser Punkte.

38. Durch Umlegung lassen sich auch leicht die beiden folgenden Fragen lösen.

Aufgabe III. Den Abstand zweier zueinander paralleler Geraden zu finden.

Aufgabe IV. Den Abstand eines Punktes von einer Geraden zu bestimmen.

Man braucht nämlich nur in beiden Fällen die Ebene, die beide Elemente enthält, in eine der Bildebenen niederzuklappen. Nicht so unmittelbar sind folgende Anwendungen des Umlegens:

Aufgabe V. Den Abstand zweier zueinander paralleler Ebenen zu finden. (Fig. 54).

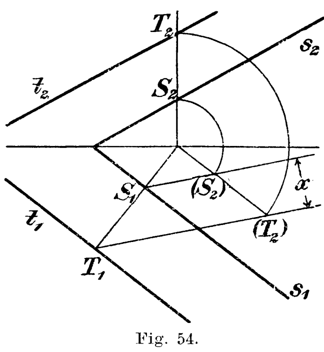


Fig. 54.

Auflösung. Schneiden wir die gegebenen Ebenen mit einer dritten die senkrecht zu ihnen steht, so haben die beiden Schnittlinien denselben Abstand wie die Ebenen selbst. Als solche Hilfsebene nehmen wir zweckmäßig eine vertikale Ebene $[n_1, n_2]$, die also zu den ersten Spuren s_1 und t_1 der gegebenen Ebenen senkrecht steht, und dann legen wir sie in die Grundrißebene nieder. Der Abstand zwischen den Umlegungen (s) und (t) der beiden Geraden, in welchen die Hilfsebene die gegebenen schneidet, ist der gesuchte.

Übungsaufgaben: I. Wie läßt sich die vorige Aufgabe lösen, wenn beide Ebenen parallel zur Achse sind? **II.** Der Abstand zweier einander paralleler und zu einer Projektionsebene senkrechten Ebenen ist gleich dem Abstande der Spurlinien in dieser Projektionsebene. **III.** Die beiden zu einer gegebenen Ebene parallelen Ebenen darzustellen, die von jener den gleichen gegebenen Abstand haben. **IV.** Die Punkte zu bestimmen, die von drei Ebenen denselben gegebenen Abstand haben. Wie viele solcher Punkte gibt es?

Aufgabe VI. Den Abstand eines Punktes $M \equiv (M', M'')$ von einer Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$ zu bestimmen. (Fig. 55).

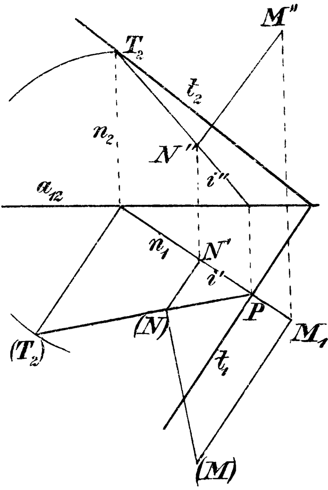


Fig. 55.

Auflösung: Es sei N der Fußpunkt des von M auf τ gefällten Lotes, dann ist eben $\overline{MN}$ der gesuchte Abstand. Ziehen wir nun MP senkrecht zu t_1, so ist auch NP senkrecht zu t_1 und NP ist also die Schnittlinie i von τ mit der durch M senkrecht zu t_1 gelegten Ebene MNP, und MN ist auch das von M auf diese Schnittlinie i gefällte Lot. Nun hat die durch M senkrecht zu t_1 gelegte Ebene als Spur im Grundriß das von M' auf t_1 gefällte Lot n_1; n_2 ist also die im Schnitt von n_1 mit a_{12} errichtete Senkrechte. Die Gerade i geht durch den Punkt $P \equiv t_1 n_1$ und durch $T_2 \equiv t_2 n_2$. Legen wir nun die Ebene $[n_1, n_2]$ in π_1 um, so finden wir leicht die Umlegungen von T_2 und M und die der Geraden i, indem wir (T_2) mit P verbinden. Das von (M) auf (i) gefällte Lot $\overline{(M)(N)}$ liefert den gesuchten Abstand. — Zur Kontrolle zeichne man auch die Gerade i'' und den auf ihr liegenden Punkt N''; dann muß die Gerade $M''N''$ senkrecht zu t_2 werden, eben weil MN senkrecht zu τ ist.

Übungsaufgabe: Der Abstand eines Punktes $P \equiv (P', P'')$ von einer zur Aufrißebene senkrechten Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$ ist gleich dem Abstande zwischen P'' und t_2.

39. Aufgabe VII. Den Winkel zu bestimmen, den zwei durch ihre Projektionen gegebene Geraden bilden.

Auflösung: Wir nehmen an, daß die beiden Geraden r und s sich in einem Punkte P schneiden, da man ja den Fall, daß sie windschief sind, auf diesen zurückführen kann, indem man durch einen Punkt der einen eine Parallele zur anderen zieht. Sind R_1, S_1 ihre ersten Spurpunkte (Fig. 56), so ist die Verbindungslinie t_1 die Spur der Ebene rs; legen wir diese in die Grundrißebene um und bestimmen die Lage (P), die P dann annimmt, und verbinden (P) mit

R_1 und S_1, so haben wir die Umlegungen (r), (s) und damit den gesuchten Winkel.

Sollten die Punkte R_1, S_1 außerhalb des Zeichenblattes fallen, so wechsele man die Rolle der beiden Projektionsebenen. Sollten auch R_2, S_2 eine solche Lage haben, so drehe man die Ebene rs, bis sie parallel zur Grundrißebene wird, indem man sie um eine horizontale Hauptlinie sich drehen läßt.

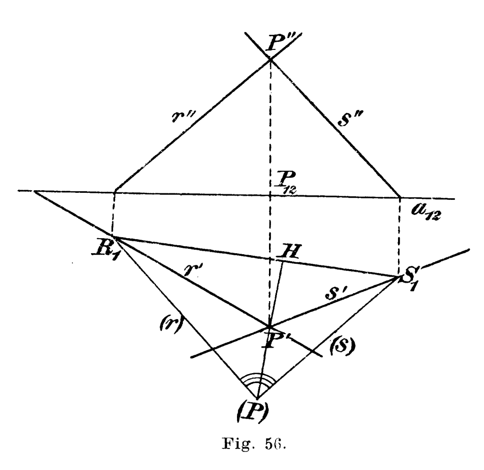


Fig. 56.

Anmerkung: Wenn man die Halbierungslinien des Winkels $\widehat{(r)(s)}$ zeichnet, so hat man damit die Umlegungen der Halbierungslinien x, y des Winkels $\widehat{rs}$; daraus kann man x', y', x'', y'' erhalten und damit eine neue Lösung der Aufgabe VI in Nr. 33. Auch wenn die beiden Geraden (r) und (s) sich nicht mehr innerhalb des Zeichenblattes schneiden sollten, kann man doch jenen Teil der Geraden (x) und (y) zeichnen, der innerhalb des Zeichenblattes fällt, und zwar auf folgende Weise: Man schneide die gegebenen Geraden durch eine beliebige Transversale BC; es seien b', b'' die beiden Winkelhalbierer am Scheitel B, c' und c'' die der Winkel bei C. Dann sind b', b'', c', c'' die Seiten eines vollständigen Vierseits, dessen Diagonale BC ist. Die beiden anderen Diagonalen sind dann die gesuchten Winkelhalbierer.

Folgesatz. Da der Winkel zwischen einer Geraden g und einer Ebene ϵ, das Komplement des Winkels ist, welchen g mit einer zu ϵ senkrechten Geraden h bildet, so sind wir auch imstande, **den Winkel zu bestimmen, den eine Gerade von gegebenen Projektionen mit einer Ebene von gegebenen Spuren bildet.**

Zur Übung: I. Die vorige Aufgabe zu lösen unter der Bedingung, daß eine oder beide Geraden senkrecht zur Achse sind (ev. unter Benutzung des Seitenrisses). **II.** Den Winkel zu finden, den die beiden Spuren einer Ebene miteinander bilden. **III.** In einer Ebene sind ein Punkt und eine Gerade gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine Gerade legen, die mit der gegebenen einen bestimmten Winkel bildet.

Es ist nützlich, einige Spezialfälle der vorigen Aufgabe zu betrachten.

a) **Die spitzen Winkel γ_3, γ_2, γ_1 zu finden, die eine Gerade $g \equiv (g', g'')$ mit den drei Projektionsachsen a_{12}, a_{13}, a_{23} bildet.** (Fig. 57).

Durch den Schnittpunkt O der drei Achsen ziehen wir die Parallele p zu der Geraden g und greifen auf dieser einen beliebigen Punkt P heraus. Stellen wir uns nun das Dreieck OPP' vor, so ist sein Winkel bei P gleich dem Winkel γ_1, den p, und damit auch g_1 mit a_{23} bildet. Legen wir dieses Dreieck in die π_1 um, indem wir es um OP' drehen, so kommt P auf das in P' auf OP' errichtete Lot zu liegen, in einem Abstande $\overline{P'(P)} = \overline{P_{12}P''}$, und es ist $\sphericalangle P'(P)O = \gamma_1$. Ähnlich erhalten wir durch Umlegung des Dreiecks OPP'' in die Aufrißebene den Winkel $O(P)^{\times}P'' = \gamma_2$. Schließlich konstruieren wir uns P''' und erhalten durch Umlegung von OPP''' den Winkel $O(P)^{*}P''' = \gamma_3$. — Zur Kontrolle beachte man, daß, weil $\overline{OP} = \overline{O(P)} = \overline{O(P)^{\times}} = \overline{O(P)^{*}}$, die Punkte (P), $(P)^{\times}$, $(P)^{*}$ auf einem Kreise um O liegen müssen.

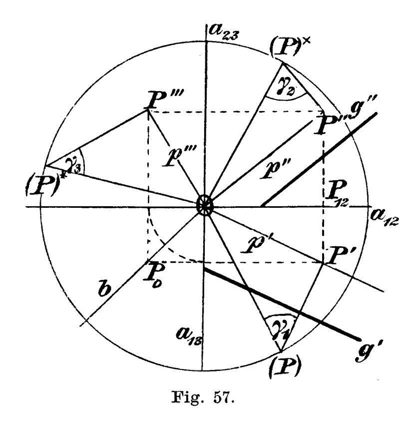


Fig. 57.

Anmerkung: Sind x, y, z die kartesischen Koordinaten von P in bezug auf die Achsen a_{12}, a_{13}, a_{23}, so ist

$$\overline{OP} = \varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

außerdem wie Fig. 57 zeigt,

$$|x| = \varrho \cdot \cos\gamma_1, \quad |y| = \varrho \cdot \cos\gamma_2, \quad |z| = \varrho \cdot \cos\gamma_3\,^{1)}.$$

Daraus folgt durch Quadrieren und Addieren

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2(\cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3);$$

also ist

$$\cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 = 1$$

die Beziehung, die zwischen den Winkeln, die eine beliebige Gerade des Raumes mit den Achsen eines dreirechtwinkligen Trieders bildet, besteht.

b) **Die Winkel zu finden, die eine Gerade $g \equiv (g', g'')$ mit den Projektionsebenen π_1, π_2 bildet.** (Fig. 58).

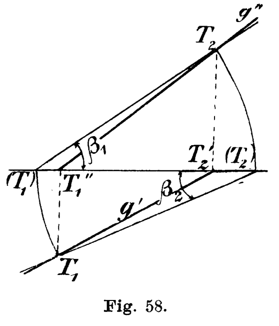


Fig. 58.

Diese Winkel heißen die Neigungen der Geraden gegen die Bildebenen und werden mit β_1 und β_2 bezeichnet; β_1 ist der Winkel

1) Mit $|u|$ soll immer (vgl. Nr. 27 α) der absolute Wert der reellen Größe u bezeichnet werden.

zwischen g und g', β_2 der zwischen g und g''. Um sie zu bestimmen, suchen wir zuerst die Spurpunkte T_1 und T_2 von g und legen dann das Dreieck $T_2 T_2' T_1$ in die Aufrißebene um, indem wir es um $T_2 T_2'$ drehen. Dies Dreieck ist rechtwinklig bei T_2', und der spitze Winkel bei T_1 ist β_1. Bei der Umlegung beschreibt T_1 einen Kreisbogen um um T_2', und kommt schließlich als (T_1) auf die Achse zu liegen. $\sphericalangle T_2(T_1)T_2'$ ist der gesuchte. Ähnlich findet man β_2.

Zur Übung: Man zeige, wie man auch an der Fig. 57 die Winkel β_1, β_2 ableiten kann und ebenso auch die Neigung β_3 von g gegen die Seitenrißebene findet.

Anmerkung: Da die beiden Strecken $\overline{T_1(T_2)}$ und $\overline{T_2(T_1)}$ die Umlegungen von $\overline{T_1 T_2}$ sind, so haben sie dieselbe Länge l. Aus den rechtwinkligen Dreiecken der Fig. 58 ergibt sich nun

$$\overline{T_1 T_2'} = \overline{(T_1) T_2'} = l \cos \beta_1; \qquad \overline{T_2 T_1''} = \overline{(T_2) T_1''} = l \cos \beta_2 \tag{1}$$

$$\overline{T_1 T_1''} = l \sin \beta_2; \qquad \overline{T_2 T_2'} = l \sin \beta_1 . \tag{2}$$

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke $(T_1) T_2 T_2'$ folgt

$$\beta_1 + \sphericalangle (T_1) T_2 T_2' = \frac{\pi}{2}.$$

Nun ist $\sphericalangle (T_1) T_2 T_2'$ der von der Geraden g mit $T_2 T_2'$ gebildete, und da nun der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene der kleinste von allen ist, den die Gerade mit irgend einer Geraden der Ebene bildet, so ist insbesondere

$$\beta_2 < \sphericalangle (T_1) T_2 T_2'.$$

Addieren wir diese Beziehung zu der vorigen, so folgt

$$\beta_1 + \beta_2 < \frac{\pi}{2}, \tag{3}$$

das heißt: **Die Summe der Neigungswinkel einer Geraden gegen die beiden Projektionsebenen ist kleiner als ein Rechter.** Dies beweist: Damit es eine Gerade gebe (und damit unendlich viele) die mit den beiden Projektionsebenen die Winkel β_1 und β_2 bildet, ist notwendig, daß letztere der Bedingung (3) genügen; daß diese Bedingung auch hinreichend ist, geht hervor aus der Lösung der folgenden

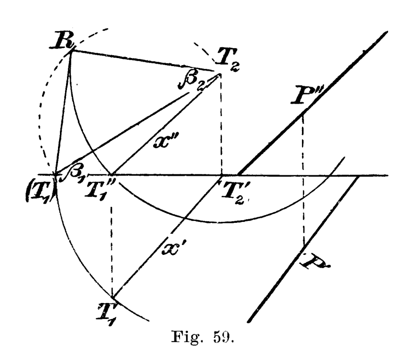


Fig. 59.

Aufgabe VIII: Durch einen Punkt $P \equiv (P', P'')$ eine Gerade zu ziehen, die mit den Projektionsebenen gegebene Neigungen β_1 und β_2 bildet, vorausgesetzt, daß $\beta_1 + \beta_2 < \frac{\pi}{2}$. (Fig. 59).

Auflösung: Es genügt offenbar von der gesuchten Geraden die

Richtungen zu kennen, da, wenn diese gefunden, die Aufgabe auf eine schon gelöste (Nr. 21) zurückgeführt ist. Wir nehmen daher T_2 als Spurpunkt einer solchen Geraden x beliebig an, loten ihn auf a_{12} als T_2' und nehmen auf a_{12} den Punkt (T_1), so daß $\sphericalangle T_2(T_1)T_2' = \beta_1$ wird. Die Strecke $\overline{(T_1)T_2}$ gibt zugleich die Länge l der gesuchten Geraden zwischen den Spurpunkten $T_1 T_2$ an, während $\overline{T_2'(T_1)} = \overline{T_2' T_1}$ ist, weshalb T_1 auf dem mit $\overline{T_2'(T_1)}$ um T_2' beschriebenen Kreise Γ liegen muß. Zeichnen wir nun das rechtwinklige Dreieck $T_2(T_1)R$ mit der Hypotenuse $T_2(T_1)$ und dem Winkel $(T_1)T_2 R = \beta_2$ (indem wir über der ersteren einen Halbkreis beschreiben und $\sphericalangle \beta_2$ anlegen), so liefert uns die Kathete $T_2 R = l \cdot \cos\beta_2$ die Strecke $\overline{T_2 T_1''}$ (vgl. Gl. (1) vor. S.). Der mit $T_2 R$ um T_2 beschriebene Kreis liefert auf der Achse zwei Punkte, deren jeder als T_1'' angesehen werden kann; die zugehörige Ordinate liefert im Schnitt mit Γ die Punkte T_1. Damit ist die Gerade x durch ihre Spurpunkte T_1, T_2 bestimmt, und man hat nur noch ihre Projektionen zu zeichnen und durch P zu x die Parallele zu ziehen, welche die gesuchte Gerade ist.

Damit die Aufgabe möglich sei, muß der um T_2 mit $T_2 R$ beschriebene Kreis die Achse schneiden; dies erfordert zunächst, daß

$$T_2 R > T_2 T_2', \quad \text{also} \quad l\cos\beta_2 > l\sin\beta_1$$

oder

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right) > \sin\beta_1,$$

demnach

$$\beta_1 + \beta_2 < \frac{\pi}{2}, \tag{3}$$

wie vorausgesetzt wurde. Ferner muß der Punkt T_1'' innerhalb des Kreises Γ fallen; dies erfordert, daß

$$\overline{T_2' T_1''} < \overline{T_2'(T_1)},$$

oder

$$\sqrt{l^2\cos^2\beta_2 - l^2\sin^2\beta_1} < l\cos\beta_1,$$

d. h.

$$\cos^2\beta_2 < 1,$$

welche Beziehung immer stattfindet. Demnach ist die Bedingung (3) nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, wie angedeutet war.

40. Aufgabe IX: Den Winkel zweier durch ihre Spurlinien gegebener Ebenen zu finden.

Auflösung: Fällt man von einem beliebigen Punkte des Raumes auf die beiden Ebenen die Lote, so sind die Winkel, die diese mit einander bilden, die gesuchten und können also durch das zu Anfang von Nr. 39, VII angegebene Verfahren gefunden werden. Diese Kon-

struktion läßt sich jedoch einfacher gestalten durch folgenden Kunstgriff, den wir Monge verdanken.

Es sei i die Schnittlinie der beiden Ebenen $\sigma \equiv [s_1, s_2]$ und $\tau \equiv [t_1, t_2]$, T_1 und T_2 ihre Spurpunkte.

In einem beliebigen Punkte P der Geraden i errichten wir zu ihr die Senkrechten in σ und τ, die s_1 in M, t_1 in N treffen; dann ist der von den Geraden PM und PN gebildete Winkel der gesuchte. Da nun zufolge der Konstruktion die Ebene PMN senkrecht zu i ist, so ist ihre Spurlinie MN auf π_1 auch senkrecht zu der entsprechenden Projektion i' (s. Nr. 30) und daher auch senkrecht zur Ebene ii'. Schneidet nun MN die Gerade i' in R, so ist PR, weil der Ebene ii' angehörend, auch senkrecht zu MN. Legen wir also das Dreieck PMN es um MN drehend in die π_1 um, so fällt der Punkt P auf i' in einer Entfernung von R gleich der Strecke $\overline{RP}$. Schließlich ist noch zu bemerken, daß das Dreieck PRT_1 rechtwinklig bei P ist, weil die Ebene MNP senkrecht zu i ist. — Nachdem dies vorausgeschickt, zeichnen wir zunächst (Fig. 60) die Projektion i' der Geraden $\sigma\tau$, und in einem beliebigen Punkte $P' \equiv R$ die Senkrechte zu i', die s_1 in M, t_1 in N trifft. Diese Linie ist dann die Spur der in P auf i errichteten senkrechten Ebene. Jetzt müssen wir das Dreieck MPN in die π_1 niederklappen. Um seine Höhe $\overline{RP}$ zu finden, drehen wir das Dreieck $T_2T_2'T_1$ um T_2T_2' in die π_2. Dann beschreiben R und T_1 Kreise um T_2' und gelangen in die Punkte (R) und (T_1) auf der Achse, und $T_2(T_1)$ wird (i). Da nun RP senkrecht zu i, so muß das von (R) auf i gefällte Lot $\overline{(R)(P)} = \overline{RP}$ sein. Tragen wir dieses auf i' von R aus nach der einen oder anderen Seite ab, und verbinden den erhaltenen Punkt $(P)^*$ mit M und N, so bilden diese Verbindungslinien den gesuchten Winkel.

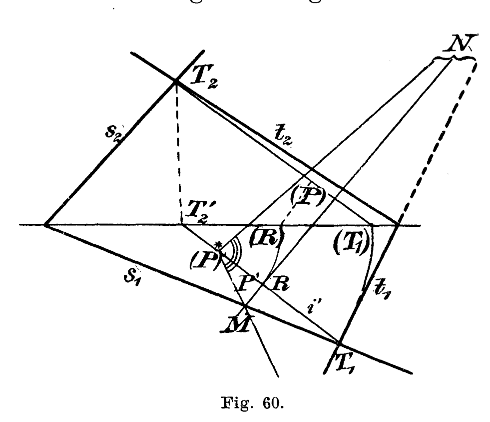


Fig. 60.

Zur Übung: Durch eine Gerade, die in einer gegebenen Ebene liegt, eine andere Ebene zu legen, die mit der ersten einen gegebenen Winkel bildet. (Man kehre das zu Anfang dieser Nummer besprochene Verfahren um).

Die dargelegte Konstruktion ist bemerkenswerter Vereinfachungen fähig in folgenden wichtigen Spezialfällen:

a) Die beiden Ebenen haben ihre ersten Spurlinien einander parallel laufend (Fig. 61). Die Schnittlinie i der beiden

Ebenen verläuft dann horizontal, i' ist also parallel zu s_1 und t_1, i'' parallel zur Achse. Schneiden wir nun σ und τ mit der durch T_2 senkrecht zu i gelegten Ebene, so ist diese Ebene vertikal und hat als Spurlinien die von T_2 auf die Achse gefällte Senkrechte u_1 und das von deren Fußpunkt U_{12} auf t_1 gefällte Lot u_1. Diese Ebene schneidet σ und τ in zwei Geraden, die sich in $T_2 \equiv t_2 s_2$ treffen und im Grundriß die Spurpunkte $u_1 t_1 = T_1$ und $u_1 s_1 \equiv S_1$ haben. Diese Ebene legen wir um $S_1 T_1$ sie drehend nieder in π_1 und finden so T_2; T_2 mit T_1 und S_1 verbunden liefert den gesuchten Winkel.

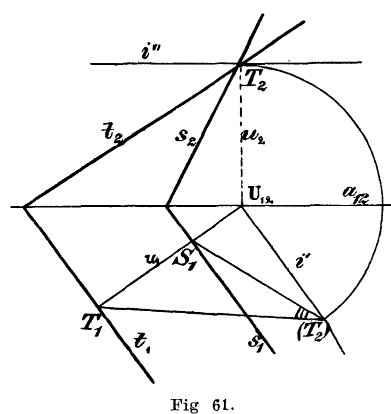


Fig 61.

b) Die Ebenen seien beide parallel zur Achse; dann ist der gesuchte Winkel offenbar der, den die Spuren mit der Seitenrißebene bilden; für die Konstruktion der letzteren ist das Verfahren in Nr. 19, III angegeben.

c) Die Winkel zu bestimmen, die eine Ebene τ mit den Projektionsebenen π_1, π_2 bildet. Diese Winkel heißen die Neigungen von τ und werden mit α_1, α_2 bezeichnet.

Die Ebene τ sei durch ihre Spuren t_1 und t_2 gegeben. Um α_1 zu finden, legen wir durch einen beliebigen Punkt O der Achse eine zu t_1 senkrechte Ebene; diese hat dann das von O auf t_1 gefällte Lot u_1 und die in O zur Achse errichtete Senkrechte u_2 als Spurlinien; sie schneidet τ in einer Geraden, deren Spurpunkte U_1 und U_2 sind, und der Winkel bei U_1 im rechtwinkligen Dreiecke $U_2 U_1 O$ ist α_1. Legen wir also dieses Dreieck in die Aufrißebene um, indem wir es um $U_2 O$ drehen, so beschreibt U_1 einen Kreis um O, der die Achse in (U_1) trifft. $\sphericalangle\, U_2(U_1)O$ ist der gesuchte. Ebenso können wir mit einer durch O senkrecht zu t_2 gelegten Ebene $[v_1, v_2]$ α_2 finden. — Als Kontrolle merke man, daß die auf $U_2(U_1)$ und $V_1(V_2)$ gefällten Lote $\overline{OH}$ und $\overline{OK}$ einander gleich werden müssen, da sie die beiden Umlegungen des von O auf τ gefällten Lotes sind.

Fig. 62.

Die Winkel α_1 und α_2 können auch gefunden werden, wenn man von der Ebene τ statt der Spuren t_1, t_2 zwei sich schneidende Geraden a, b kennt, und zwar auf folgende Weise (Fig. 63). Durch den Punkt $L \equiv ab$

legen wir eine zu (der nichtgezeichneten Spur) t_1 senkrechte Ebene, die τ in g und folglich π_1 in g' schneidet; dann ist α_1 der spitze Winkel $\widehat{gg'}$. Ist nun h eine beliebige horizontale Hauptlinie, M ihr Schnitt mit g und N der Punkt, in dem sich die durch M zu g' gezogene Parallele und die projizierende Gerade NN' treffen, so konstruieren wir uns das Dreieck LMN, dessen Winkel bei $M = \alpha_1$. Wir zeichnen uns also die beliebige Hauptlinie h in ihren Projektionen h'', h', und fällen, da ja $\widehat{gh}$ ein Rechter, von L' das Lot auf h', und erhalten damit g' und $M' \equiv g'h'$; die entsprechende Ordinate liefert M'' auf h'' und $g'' \equiv L''M''$. N' fällt mit L' zusammen und N'' ist der Punkt, in welchem die zugehörige Ordinate h'' trifft. Da nun MN horizontal, und LN vertikal ist, so hat man $\overline{LN} = \overline{L''N''}$ und $\overline{MN} = \overline{M'N'}$; wir kennen also die beiden Katheten des Dreiecks LMN. Tragen wir also auf h'' von N'' aus $\overline{N''(M)} = \overline{N'M'}$ ab und verbinden L'' mit (M), so ist der Winkel bei (M) der gesuchte α_1. Ähnlich wird α_2 gefunden.

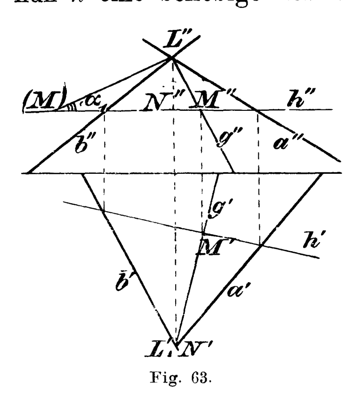


Fig. 63.

Bemerkung: Zwischen den Neigungen α_1, α_2 einer beliebigen Ebene findet eine Beziehung statt, die man leicht aus der in Nr. 39 gefundenen Beziehung zwischen den Neigungswinkeln einer Geraden ableiten kann. Zieht man nämlich eine zu τ senkrechte Gerade r und bezeichnet deren Neigungswinkel mit β_1, β_2, so ist offenbar

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1, \quad \beta_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2,$$

daher ist

$$\beta_1 + \beta_2 = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Nun ist aber (Nr. 39)

$$\beta_1 + \beta_2 < \frac{\pi}{2},$$

daher

$$\alpha_1 + \alpha_2 > \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Wir sehen also: **Die Summe der Neigungen einer beliebigen Ebene ist größer als ein Rechter.** Damit es also eine (und damit unendlich viele) Ebenen gibt, die mit den beiden Projektionsebenen die Winkel α_1, α_2 bildet, ist notwendig, daß die Beziehung (4) besteht; daß sie auch hinreichend ist, ergibt sich aus der Lösung der folgenden

Aufgabe X. Durch einen Punkt $M \equiv (M', M'')$ eine Ebene mit gegebenen Neigungswinkeln α_1 und α_2 zu legen, vorausgesetzt, daß $\alpha_1 + \alpha_2 > \frac{\pi}{2}$ (Fig. 64).

Auflösung. Kennt man die Stellung der gesuchten Ebene, so ist die Aufgabe auf eine schon gelöste (Nr. 23, b) zurückgeführt, und man kann sie als gelöst betrachten, wenn man irgend eine Ebene mit diesen Neigungen, etwa die durch den Punkt P der Aufrißebene gehende gefunden hat. In diesem Falle geht die Spurlinie t_2 der betr. Ebene durch P[1]). Wir nehmen nun auf der Achse einen Punkt A derart, daß der Winkel $PAP' = \alpha_1$ wird, dann beschreiben wir mit $P'A$ um P' einen Kreis Γ, an den t_1 Tangente werden muß. Nun fällen wir von P' das Lot $P'H$ auf PA und beschreiben mit $P'H$ um P' einen Kreis und ziehen an diesen jene Tangente, die mit der Achse den Winkel α_2 bildet. Ihr Schnitt mit der Ordinate PP' sei Q; dann ist die von Q an Γ gezogene Tangente t_1, der Schnittpunkt $t_1 a_{12} \equiv T_{12}$ mit P verbunden liefert t_2.

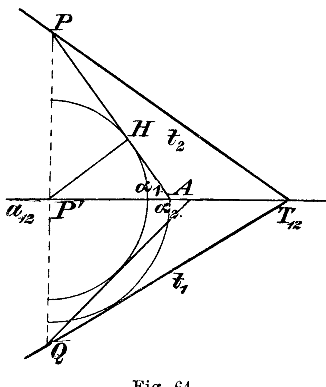


Fig. 64.

Damit die Aufgabe lösbar sei, muß Q außerhalb des Kreises Γ liegen, also muß sein $\overline{P'Q} > \overline{P'A}$. Ist nun $\overline{PP'} = p$, so geht diese Bedingung über in die folgende:

$$\frac{p \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \sin \alpha_1}{\cos \alpha_2} > p \cdot \operatorname{tg} \alpha_1,$$

oder

$$\sin \alpha_1 > \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right),$$

folglich

$$\alpha_1 + \alpha_2 > \frac{\pi}{2},$$

welche Bedingung der Voraussetzung entspricht.

Zur Übung; Durch eine gegebene Gerade eine Ebene zu legen, die gegen die Grundrißebene eine bestimmte Neigung hat.

Zehntes Kapitel.

Weitere Aufgaben der metrischen Geometrie.

41. Aufgabe I. Einen Kreis darzustellen, der durch seine Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$, seinen Mittelpunkt O und seinen Radius r gegeben ist.

1) Um das folgende leichter zu verstehen, ist es ratsam, sich die Fig. 62 vor Augen zu halten.

Auflösung: Wir ziehen durch O in der Ebene τ eine Gerade p parallel und eine q senkrecht zur horizontalen Spur t_1; p' wird dann die durch O' parallel zu t_1, p'' die durch O'' parallel zur Achse gezogene Gerade sein, q' das von O' auf t_1 gefällte Lot, q'' ergibt sich dann leicht. Da p und q (in Richtung) konjugierte Durchmesser von Γ sind, so werden p' und q' (vgl. Nr. 1, Übungssatz) konjugierte Durchmesser, und zwar, weil sie senkrecht zueinander, die Achsen von Γ'. Da p parallel zur Grundrißebene, so wird sich der zugehörige Durchmesser von Γ $A_1A_2 = 2r$ in seiner wahren Länge projizieren, daher wird der um O' mit r beschriebene Kreis p' in A_1' und A_2' schneiden. Dagegen der auf q liegende Durchmesser $B_1B_2 = 2r$, hat als Projektion die Strecke $\overline{B_1'B_2'} = \overline{B_1B_2} \cdot \cos pp' = \overline{B_1B_2} \cdot \cos \widehat{\tau\pi_1} = 2r \cdot \cos\alpha_1$, wo α_1 der Neigungswinkel von τ gegen π_1 ist. Bestimmt man also (nach vor. Nr.) α_1 und beschreibt um O' mit $r \cdot \cos\alpha_1$ einen Kreis, so trifft dieser q' in B_1' und B_2'. **Γ' ist also die Ellipse mit den Halbachsen r und $r \cdot \cos\alpha_1$.** Bestimmt man nun mittels der entsprechenden Ordinaten auf p'' und q'' die Punkte A_1'', A_2'', B_1'', B_2'', so ergibt sich: **Γ'' ist die Ellipse, welche $A_1''A_2''$ und $B_1''B_2''$ als konjugierte Durchmesser hat.**

Zur Übung: I. Dieselbe Aufgabe durch Umlegung der Ebene τ zu lösen. **II.** Ein Rechteck $ABCD$ darzustellen, von dem man die Ebene und zwei Gegenecken A, C kennt und außerdem weiß, daß die Ecke B auf einer durch A gehenden Geraden liegt. **III.** Die ebene Trennungsfläche zweier Medien ist gegeben, sowie die Projektion eines einfallenden Strahles; man soll die des reflektierten oder gebrochenen Strahles finden.

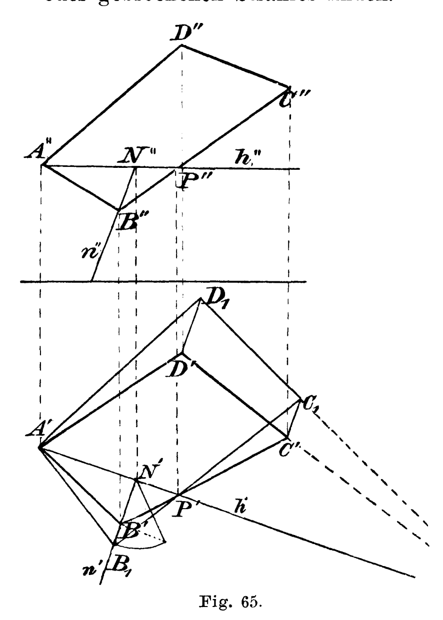


Fig. 65.

Aufgabe II. Von einem ebenen Vielecke kennt man die beiden Projektionen $A'B'C'D'\ldots$, $A''B''C''\ldots$, das Vieleck selbst zu konstruieren. (Vorausgesetzt ist natürlich, daß die Projektionen der Schnittpunkte entsprechender Diagonalen auf derselben Ordinate liegen, damit das dargestellte Vieleck auch eben sei. Vgl. Nr. 26.)

Auflösung: Zur Lösung dieser Aufgabe hätte man nur nötig, die Ebene der Figur τ in eine der Bildebenen niederzulegen; da dies aber nicht angeht, wenn keine der Spurlinien in die Zeichenebene fällt, so ist folgendes Verfahren ohne Ausnahmen anwendbar (Fig. 65).

Wir ziehen durch A die horizontale Hauptlinie h der Ebene τ. Ihr Aufriß ist die durch A'' zur Achse gezogene Parallele h''; ist nun $P'' \equiv B''C'' \cdot h''$, so schneidet $B'C'$ die zugehörige Ordinate in P', welches mit A' verbunden h' liefert. Um die Linie h lassen wir nun die Ebene τ sich drehen, bis sie parallel zu π_1 wird. Bei dieser Lage ist ihre Projektion $A_1B_1C_1D_1$ kongruent dem ursprünglichen Polygon $ABCD$. A_1 fällt mit A' zusammen; um B_1 zu finden, denken wir uns die durch B zu h senkrechte Gerade n gezogen. Da der rechte Winkel $\widehat{nh}$ einen horizontalen Schenkel hat, so ist auch seine Projektion $\widehat{n'h'}$ ein Rechter, daher ist n' das von B' auf h' gefällte Lot. Die durch seinen Fußpunkt N' gezogene Ordinate trifft h'' in N'', daher ist $B''N'' = n''$. Ist nun die Drehung der Ebene τ ausgeführt, so wird sich der Punkt im Grundriß als B_1 von n' abbilden derart, daß $\overline{N'B_1} = \overline{NB}$; letzteres ist aber (Nr. 37, Folgesatz) Hypotenuse eines Dreiecks, dessen Katheten $B'N'$ und die Differenz der Horizontal-Koten der Punkte B und N sind (d. i. der Abstand zwischen B'' und h''), woraus sich B_1 leicht konstruieren läßt. Beachten wir nun, daß der Punkt $P \equiv (P', P'')$ auf der Drehungsachse liegt, also fest ist, so folgt daraus, daß der Punkt C_1 auf der Geraden B_1P' liegen muß; da nun B_1B' und C_1C' parallel sein müssen, so liegt C_1 auch auf dem von C' auf h' gefällten Lote. Ebenso müssen sich die Geraden $C'D'$ und C_1D_1 auf h' schneiden, und es muß $D'D_1$ senkrecht zu h' sein, woraus sich D_1 leicht ergibt, usw.

Zur Übung: Welche geometrische Beziehung besteht zwischen den Vielecken $A'B'C' \ldots$, $A_1B_1C_1 \ldots$?

42. Aufgabe III. Durch einen Punkt $P \equiv (P', P'')$ eine Gerade zu ziehen, die mit einer gegebenen $g \equiv (g', g'')$ einen Winkel α bildet.

Auflösung: Man lege die Ebene Pg in die Grundrißebene um und bestimme die Lagen, die P und g infolgedessen einnehmen. Die durch (P) gelegten Geraden, die mit (g) den Winkel α bilden, sind die Umlegungen der gesuchten Geraden. Um diese selbst zu finden, braucht man nur die Ebene Pg in ihre ursprüngliche Lage zu bringen. Zur Übung möge der Leser selber die Konstruktion ausführen und auch den Fall untersuchen, daß die gegebene Gerade die Achse ist.

Aufgabe IV. Durch eine Gerade $g \equiv (g', g'')$ eine Ebene zu legen, die mit einer gegebenen $\tau \equiv [t_1, t_2]$ den Winkel α bildet.

Auflösung: Es sei $P \equiv g\tau$, M ein beliebiger Punkt von g, N der Fußpunkt des von M auf τ gefällten Lotes und $\overline{MN} = d$. Alle durch M gehenden Ebenen, die mit der Ebene τ den Winkel α bilden, umhüllen einen Kreiskegel, dessen Basis der Kreis Γ in der Ebene τ

ist mit dem Zentrum N und dem Radius $d \cdot \operatorname{cotg} \alpha$. Die von P an Γ gezogenen Tangenten x, y bestimmen zugleich mit g zwei Ebenen, die die Aufgabe lösen. Um jene zu finden, wird man am besten die Ebene τ umlegen, (P) und (Γ) aufsuchen und die Tangenten (x), (y) bestimmen. Bringt man τ wieder in seine ursprüngliche Lage, so bekommt man x, y, wodurch die Aufgabe gelöst ist. Wir überlassen dem Leser auch die Ausführung dieser Konstruktion, sowie den Nachweis, daß es notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit der Aufgabe ist, daß $\alpha > \widehat{g\tau}$.

43. Aufgabe V. Von einem Dreiecke ABC kennt man den Grundriß und eine Ecke (etwa A) im Aufriß; die beiden anderen Ecken zu bestimmen, so daß das Dreieck einem gegebenen ähnlich wird (Fig. 66).

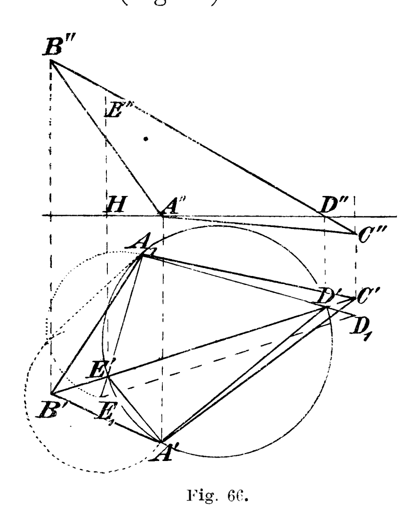


Fig. 66.

Auflösung: Gezeichnet seien schon die gegebenen Punkte A', B', C' und A'' (letzterer mit A' auf derselben Ordinate). Das Dreieck, dem das gesuchte ähnlich sein soll, kann man sich in beliebiger Lage und Größe gezeichnet denken, z. B. passend so, daß die eine Seite mit $B'C'$ zusammenfällt, wobei wir dann zweckmäßig die dritte Ecke A_1 auf die A' entgegengesetzte Seite legen. In der Ebene π des gesuchten Dreiecks ABC denken wir uns nun die Horizontale AD und die dazu Senkrechte AE gezogen, wo D und E auf BC liegen sollen. Wir wollen zuerst aus den gegebenen Stücken die Lage der Hilfspunkte D und E bestimmen und werden dann sehen, wie B, C daraus folgen.

Zunächst muß $\overline{A'D'} = \overline{AD}$ werden, weil AD horizontal ist, und da der rechte Winkel EAD einen horizontalen Schenkel hat, so muß auch $\sphericalangle D'A'E' = \frac{\pi}{2}$ sein. Nun sind die Dreiecke ABC und $A_1B'C'$ ähnlich, sie bestimmen daher in den beiden Ebenen π und π_1, in denen sie liegen, eine Ähnlichkeitsbeziehung, also ist

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{B'D'}}{\overline{C'D'}}; \quad \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{B'E'}}{\overline{C'E'}},$$

so daß in dieser Ähnlichkeit den Punkten D, E von π die Punkte D', E' von π_1 entsprechen. Nun sind in ähnlichen Figuren entsprechende Winkel einander gleich, daher ist $\sphericalangle D'A_1E' = DAE = \frac{\pi}{2}$.

Hieraus folgt, daß das Viereck $D'A'E'A_1$ in A_1 und A' rechte Winkel hat; da nun D', E' auf $B'C'$ liegen, so braucht man nur den Kreis zu beschreiben, der durch A_1 und A' geht und sein Zentrum auf $B'C'$ hat; er schneidet diese Gerade in zwei Punkten (die wir vorläufig L und M nennen wollen), der eine ist D', der andere E'. Wir wollen noch zeigen, daß man hier nicht beliebig wählen kann. Bezeichnen wir nämlich die Winkel A_1LM, $A'LM$, A_1ML, $A'ML$ mit λ_1, λ', μ_1, μ', so ist $\lambda_1 + \mu_1 = \frac{\pi}{2}$, $\lambda' + \mu' = \frac{\pi}{2}$. Je nachdem also $\lambda_1 \gtrless \lambda'$, wird bzw. $\mu_1 \lesseqgtr \mu'$ sein. Nun ist der Winkel $ADE > A'D'E'$ (s. Nr. 2) und $\sphericalangle ADE = A_1D'E'$, folglich ist $\sphericalangle A_1D'E' > A'D'E'$. Dies zeigt uns, daß, wenn $\lambda_1 > \lambda'$, man den Punkt L als D' wählen muß, wenn aber $\mu_1 > \mu'$, muß man M für D' wählen; jedenfalls aber ist D' und damit auch E' eindeutig bestimmt. — Um nun D'' zu finden, beachten wir, daß $A''D''$ parallel zur Achse sein muß, weil ja AD horizontal angenommen wurde. D'' ist also der Schnitt der durch A'' zur Achse gezogenen Parallelen mit der zu D' gehörigen Ordinate. — Weniger einfach ist die Auffindung von E''. Wir nehmen auf A_1D' die Strecke $\overline{A_1D_1} = \overline{A'D'} = \overline{AD}$, ziehen durch D_1 die Parallele zu D_1E_1, die A_1E' in E_1 trifft. Nun sind die Dreiecke $A_1D_1E_1$ und ADE einander ähnlich, da aber die Seite des einen A_1D_1 der entsprechenden des anderen gleich ist, so sind die Dreiecke auch kongruent. Daher ist insbesondere $\overline{AE} = \overline{A_1E_1}$. Aus der wahren Länge und der Projektion läßt sich aber (nach Nr. 37, Folgesatz) die Differenz der Vertikal-Koten der Endpunkte bestimmen. Die Ordinaten von A' und E' mögen die Achse in A_{12} und E_{12} treffen, dann ist

$$AE = \sqrt{\overline{A'E'}^2 + (\overline{A''A_{12}} - \overline{E''E_{12}})^2},$$

folglich

$$|\overline{A''A_{12}} - \overline{E''E_{12}}| = \sqrt{\overline{A_1E_1}^2 - \overline{A'E'}^2}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist immer reell[1]) und durch Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse A_1E_1 und der einen Kathete $A'E'$ erhält man den Wurzelausdruck, den wir d nennen wollen. Dann ist

$$\overline{E''E_{12}} = \overline{A''A_{12}} \pm d.$$

Ist nun H der Schnitt der Geraden $A''D''$, $E'E_{12}$ und tragen wir auf der letzteren von H aus d ab, so bekommen wir E'' bzw. einen zweiten Punkt $\overline{E}''$. Die Gerade $D''E''$ schneidet die zu B', C' gehörenden Ordinaten in B'', C''; dagegen liefert die Gerade $D''\overline{E}''$

1) Der Kürze halber überlassen wir es dem Leser zu beweisen, daß immer $\overline{A_1E_1} > A'E'$.

ebenso die Punkte $\overline{B}''$, $\overline{C}''$. Die beiden Dreiecke $A''B''C''$ und $A''\overline{B}''\overline{C}''$ lösen die Aufgabe.

Anmerkung: Die obige Aufgabe läßt sich auch in folgender Weise ausdrücken: Man soll ein gerades dreiseitiges Prisma durch eine Ebene (die durch einen Punkt einer Kante geht) so schneiden, daß der Schnitt einem gegebenen Dreiecke ähnlich wird. Da nun diese wie die obige Aufgabe zwei Lösungen hat, **so gibt es zwei Gruppen von einander parallelen Ebenen, die ein dreiseitiges Prisma so schneiden, daß die Schnittflächen einem gegebenen Dreiecke ähnlich sind.**

Zur Übung: Ein gegebenes Parallelogramm so zu plazieren, daß sein Grundriß ein Quadrat wird.

Elftes Kapitel.

Andere Kunstgriffe zur darstellend-geometrischen Lösung von Problemen der metrischen Geometrie.

a) Bewegung der Figuren.

44. Erinnern wir uns, daß wir schon (zu Anfang von Nr. 35) die Bemerkung gemacht haben, daß der Kunstgriff, zu dem man gewöhnlich seine Zuflucht nimmt, um metrische Probleme zu lösen, darin besteht, die Lage der gegebenen Elemente in bezug auf die Grundebenen in geeigneter Weise zu verändern. Nun ist klar, daß man dies auch bewirken kann, indem man entweder die gegebenen Stücke der Aufgabe selbst bewegt, oder die Lage der Projektionsebenen ändert. Wir werden daher der Reihe nach und im allgemeinen die Methoden behandeln, nach denen man diese beiden Operationen ausführen kann, wobei wir bemerken, daß bei der ersten Operation im speziellen auch Umlegungen vorkommen, mit denen wir uns ja schon im Vorigen beschäftigt haben.

Bekanntlich kann man eine Figur $\mathfrak{F}$ aus ihrer Lage in jede andere Lage bringen durch eine geeignete Verschiebung, verbunden mit einer Drehung um eine passend gewählte Achse[1]). Kennt man nun von der Figur $\mathfrak{F}$ die beiden Projektionen und kennt man auch vermittels der Projektionen die Strecke AB, längs deren die translatorische Bewegung vor sich geht, und zwar in dem Sinne und der Größe $\overrightarrow{AB}$, so nimmt die Figur eine neue Lage $\mathfrak{F}^*$ an, deren Projektion man offenbar auf folgende Weise erhält:

Ist $P \equiv (P', P'')$ ein Punkt von $\mathfrak{F}$ und zieht man die Strecken $P'P'^*$, $P''P''^*$ äquipollent den Strecken $A'B'$, $A''B''$,

1) S. z. B. Ch. Méray, *Nouv. élém. de géométrie* II. ed. 1904, S. 394.

so sind deren Endpunkte die Projektionen der neuen Lage P_+ des Punktes P. Jede Gerade verwandelt sich daher in eine parallele Gerade, jede Ebene in eine parallele Ebene.

Zur Übung: Die Lage einer Geraden oder einer Ebene zu zeichnen, die sie nach Ausführung einer angegebenen Verschiebung annehmen.

45. Wir gehen zu den Drehungen über, indem wir uns vor allem mit dem praktisch interessantesten Falle, daß die Drehachse senkrecht zu einer Projektionsebene steht, befassen.

Aufgabe. Gegeben die Darstellung einer Figur nach der Mongeschen Methode: ihre Darstellung in derjenigen Lage zu finden, die sie annimmt, wenn sie in bestimmtem Sinne um den Winkel α um eine vertikale Achse gedreht ist (Fig. 67).

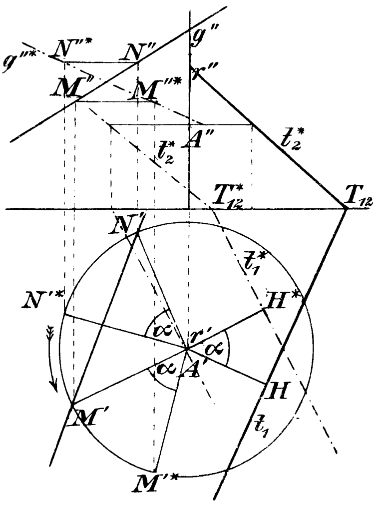


Fig. 67.

Auflösung: Da man sich die Figur $\mathfrak{F}$ aus Punkten, Geraden und Ebenen bestehend denken kann, so ist die Aufgabe in der Tat gelöst, wenn sie es für eine aus einem Punkte, einer Geraden, einer Ebene bestehende Figur ist. Beschäftigen wir uns also zunächst mit diesen Fällen.

1. Es sei $M \equiv (M', M'')$ der Punkt, den man um die vertikale Achse $r \equiv (r', r'')$ rotieren läßt. Zufolge dieser Bewegung beschreibt P einen Kreisbogen vom Zentriwinkel α, der in einer durch M gehenden horizontalen Ebene liegt, und dessen Mittelpunkt auf r liegt. Dieser Bogen projiziert sich im Grundriß in seiner wahren Größe, d. i. in einen Kreisbogen $M'M'^*$ mit dem Zentrum r', dem Radius $r'M'$, der Größe α, so daß der Sinn von $M'M'^*$ mit dem Sinn der Rotation übereinstimmt. Die Ordinate von M' trifft die durch M'' zur Achse a_{12} gezogene Parallele in M''^*. $M^* \equiv (M'^*, M''^*)$ ist die gesuchte neue Lage des Punktes M.

2. Wir betrachten jetzt eine Gerade $g \equiv (g', g'')$. Um die Lage zu finden, die sie infolge der Rotation annimmt, genügt die zweier ihrer Punkte M^* und N^* zu bestimmen, dann wird $g^* \equiv M^*N^*$ sein. Als solche Hilfspunkte kann man zweckmäßig auch die Spurpunkte nehmen, und wenn g zufällig die Achse r trifft, so würde der Schnittpunkt auch der g angehören; man würde dann also nur noch eines einzigen Punktes bedürfen.

Anmerkung: Da die beiden Dreiecke $r'M'N'$ und $r'M'^*N'^*$

kongruent sind, so folgt: „Eine Strecke behält bei einer Rotation um eine vertikale Achse ihre Länge im Grundriß bei; die Projektionen sind Tangenten eines Kreises, dessen Mittelpunkt die Spur der Rotationsachse ist.“

3) Betrachten wir schließlich eine Ebene τ. Ist τ durch zwei sich schneidende Geraden oder durch einen Punkt und die Affinitätsachse bestimmt, so kann man die neue Lage, die sie infolge der Rotation annimmt, durch Anwendung des unter 1) und 2) Gesagten finden. Ist sie jedoch durch ihre Spuren t_1, t_2 gegeben und man will die Spuren für die neue Lage t_1^*, t_2^* finden, so betrachte man zunächst die horizontale Spur t_1. Man fälle von a' auf t_1 das Lot $a'H$ und zeichne die neue Lage H^*, die dieser Punkt zufolge der Rotation einnimmt, die in H^* auf $a'H^*$ errichtete Senkrechte ist dann offenbar t_1^*. Ist ferner A der Punkt, in welchem τ die Rotationsachse r schneidet, so ist sein Grundriß der Punkt r', woraus sich dann leicht sein Aufriß A'' (nach Nr. 16) ergibt. Die Ebene τ geht sowohl vor, als auch nach der Rotation durch den Punkt $A \equiv (A', A'')$, also ist τ^* nichts anderes, als die durch A und t_1^* gehende Ebene. Um ihre zweite Spurlinie zu finden, ziehen wir die durch A gehende horizontale Hauptlinie; ihr Grundriß ist die durch A' zu t_1^* gezogene Parallele, ihr Aufriß die durch A'' zu a_{12} gezogene Parallele, man findet also leicht ihren Spurpunkt; verbinden wir ihn mit dem Punkte $t_1^* a_{12}$, so erhalten wir t_2^*.

In ganz derselben Weise läßt sich die Aufgabe für den Fall lösen, daß die Drehungsachse senkrecht zur Aufrißebene steht.

Zur Übung: **I.** Welches ist die Enveloppe der Geraden g'' in 2), wenn man den Winkel α variiert? **II.** Wie kann man die vorigen Aufgaben lösen, wenn die Drehungsachse parallel zur Projektionsachse ist? (Man benutze den Seitenriß.)

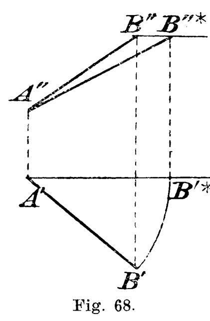


Fig. 68.

46. Es soll nun an zwei Beispielen gezeigt werden, welchen Nutzen man aus einer passend gewählten Drehung schöpfen kann[1]).

Aufgabe I. Den Abstand zweier durch ihre Projektionen gegebener Punkte zu bestimmen (Fig. 68).

Auflösung: Es seien $A \equiv (A', A'')$ und $B \equiv (B', B'')$ die gegebenen Punkte. Wir lassen die AB im Grundriß projizierende Ebene um die A projizierende vertikale Gerade AA' sich drehen, bis sie der Aufrißebene parallel ist. Die neue Lage, die B einnimmt, B^*, hat

1) Der Leser wird viele weitere Beispiele finden bei E. Sulfner, *Aufgaben aus der darstellenden Geometrie, in denen Entfernungen oder Winkel gesucht oder gegeben sind, mit Hilfe von Drehungen der Objekte zu lösen* (Nürnberg, 1902).

im Grundriß einen Punkt B'^*, der auf der durch A' zur Achse gezogenen Parallelen im Abstande $A'B'$ von A' liegt. Die zugehörige Ordinate schneidet die durch B'' zur Achse gezogene Parallele in B''^*. Da jetzt die Strecke $\overline{AB^*}$ parallel zur Aufrißebene, so ist sie gleich ihrer Projektion; nun ist aber $\overline{AB^*} = \overline{AB}$, folglich $\overline{A''B''^*} = \overline{AB}$.

Zur Übung: Welche von beiden Lösungen dieser Aufgabe, die obige oder die in Nr. 37, ist vorteilhafter?

Aufgabe II. Die Neigungen einer Ebene, die durch ihre Spuren gegeben ist, **gegen die Projektionsebenen zu finden** (Fig. 69).

Lösung: Es sei $\tau \equiv [t_1, t_2]$ die gegebene Ebene, von der man zunächst die Neigung α_1 gegen die Grundrißebene finden will. Wäre τ senkrecht zur Aufrißebene und somit t_1 senkrecht zu a_{12}, so würde der gesuchte Winkel der zwischen a_{12} und t_2 sein. Wenn sich nun τ nicht in dieser speziellen Lage befindet, so kann man sie durch eine Drehung um eine beliebige vertikale Achse $a \equiv (a', a'')$ in diese Lage bringen. Die Größe dieser Drehung muß derart sein, daß t_1^* senkrecht zur Achse wird. Der Punkt $A \equiv (A', A'') \equiv a\tau$ behält seine Lage bei, daraus ergibt sich t_2^*; dann ist $\widehat{t_2^* t_{12}} = \alpha_1$. — Ähnlich läßt sich auch α_2 finden. Aus der Konstruktion ergibt sich, daß man durch eine Rotation von geeigneter Größe um eine vertikale (oder horizontale) Achse jede Ebene in eine zu der zweiten (oder ersten) Projektionsebene senkrechte Lage bringen kann.

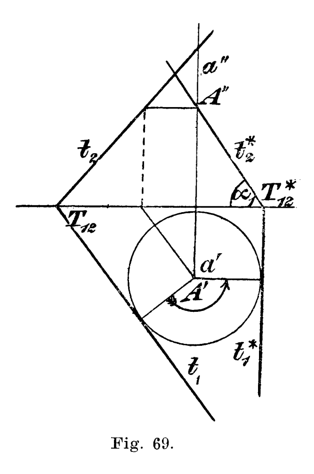


Fig. 69.

Zur Übung: Den Schnitt einer Geraden mit einer Ebene zu finden, indem man letztere durch eine Rotation dahin gebracht hat, daß sie zu einer der Projektionsebenen senkrecht steht.

47. Weisen wir jetzt noch darauf hin, wie man die in Nr. 45 behandelte Aufgabe unter der viel allgemeineren Annahme, daß die Achse sich in beliebiger Lage befindet, lösen kann. Der Kürze wegen beschränken wir uns auf die Annahme, daß $\mathfrak{F}$ nur aus einem einzigen Punkte $P \equiv (P', P'')$ bestehe. Durch einen beliebigen auf der Rotationsachse $a \equiv (a', a'')$ gewählten Punkt A (Fig. 70) legen wir die zu a senkrechte Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$; die durch P zu a gezogene Parallele p schneidet τ in einem Punkte N, der die Orthogonalprojektion von P auf τ ist. Man lege nun τ in die Grundrißebene um und bestimme (A) und (N). Infolge der gewünschten Rotation beschreibt N auf der Ebene τ einen Bogen in bestimmtem Sinne um den Mittelpunkt

A von gegebener Größe α und gelangt dadurch in eine Lage N_α, deren Umlegung leicht zu finden ist, wenn man bedenkt, daß $\overline{(A)(N_\alpha)} = \overline{(A)(N)}$ und $\sphericalangle (N)(A)(N_\alpha) = \alpha$. Denkt man sich nun wieder τ in seine ursprüngliche Lage zurückgedreht, so findet man N_α' und N_α''. Bezeichnen wir jetzt mit P_α die gesuchte Lage des Punktes P, so müssen die Strecken NP und $N_\alpha P_\alpha$ äquipollent sein; ziehen wir demnach die Strecken $N_\alpha' P_\alpha'$ äquipollent mit $N'P'$ und $N_\alpha'' P_\alpha''$ äquipollent mit $N''P''$, so sind P_α' und P_α'' die Projektionen des gesuchten Punktes. Man beachte noch: Da der Punkt A unabhängig von P ist, so brauchen die auf A bezüglichen Konstruktionen nur einmal ausgeführt zu werden, welcher Art auch die rotierende Figur sei; ist diese eine Gerade g, so wird man zweckmäßig noch den Punkt τg zur Bestimmung herbeiziehen, ist sie aber eine Ebene ϵ, so halte man sich gegenwärtig, daß der Punkt $\epsilon\alpha$ fest bleibt.

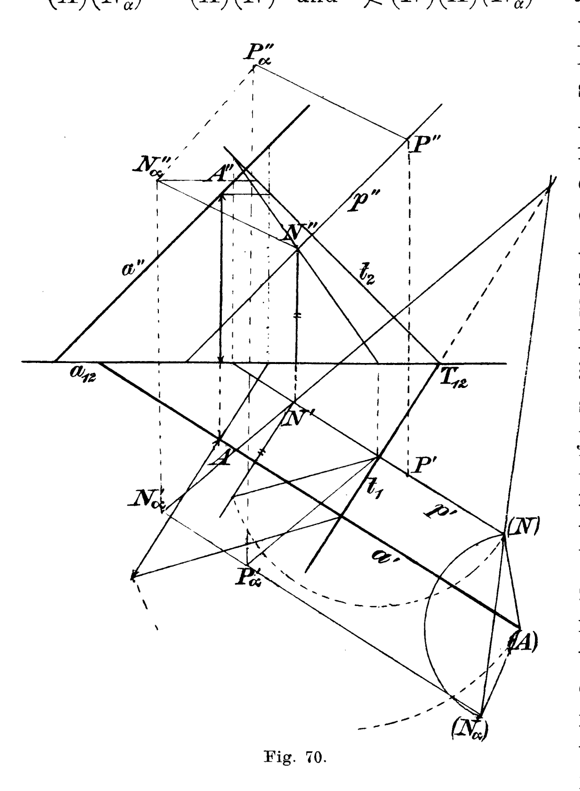


Fig. 70.

b) Verlegung der Projektionsebenen.

48. Wir setzen zuerst den Fall, der theoretisch und praktisch von der größten Wichtigkeit ist, daß nur eine, z. B. die vertikale Ebene, eine Verlegung erfährt. Wir bezeichneten schon die beiden Projektionsebenen mit π_1 und π_2, sowie die Achse mit a_{12} in unserem früheren System; wir wollen die neue Vertikalebene mit $\bar{\pi}_2$ und die neue Achse mit $\bar{a}_{12}$ bezeichnen. In die Ebene π_1 denken wir uns sowohl die π_2 als auch die $\bar{\pi}_2$ niedergeklappt (vgl. Nr. 4) und um die entstehenden Gebiete auseinander zu halten, legen wir sowohl auf der einen, wie auf der anderen Achse einen positiven Sinn fest (vgl. Nr. 5). Nehmen wir z. B. an, daß in bezug auf die unveränderte Horizontalebene diejenigen Teile des Raumes, die man als positiv in dem ursprünglichen

System ansah, es auch im neuen bleiben[1]). **Dann bleibt, wenn wir zu dem neuen System übergehen, die Horizontal-Kote eines beliebigen Punktes des Raumes unverändert in Wert und Vorzeichen.** Diese Bemerkung ermöglicht die Auffindung der neuen Vertikalprojektion $\overline{P}''$ eines beliebigen Punktes P, dessen Projektionen (P', P'') im alten Systeme bekannt sind. $\overline{P}''$ liegt nämlich auf dem von P' auf $\bar{a}_{12}$ gefällten Lote $P'\overline{P}_{12}$ in einer Entfernung gleich der Strecke $\overline{P''P_{12}}$; außerdem liegt $\overline{P}''$ in dem positiven Gebiet des neuen Systems, wenn sich auch P'' in dem analogen befindet und umgekehrt. Diese Konstruktion kann durch eine andere (neue) ersetzt werden, die ratsam ist, wenn sie für mehrere Punkte anzuwenden ist, und zu der man auf folgende Weise gelangt. Es sei O der Schnittpunkt der beiden Achsen a_{12} und $\bar{a}_{12}$ und P_0 der Punkt, in dem sich die durch P'' zu a_{12} und durch $\overline{P}''$ zu $\bar{a}_{12}$ gezogenen Parallelen treffen (Fig. 71); dann liegt P_0 bekanntlich auf dem Halbierer b des Winkels zwischen der positiven Richtung von $\bar{a}_{12}$ und der negativen von a_{12}. **Um also $\overline{P}''$ zu erhalten, ziehen wir durch P'' die Parallele zu a_{12}, suchen deren Schnitt P_0 mit der Geraden b und ziehen durch P_0 die Parallele zu $\bar{a}_{12}$; diese schneidet das von P' auf $\bar{a}_{12}$ gefällte Lot in $\overline{P}''$.** — Wollen wir den neuen Aufriß einer Geraden $g \equiv (g', g'')$ haben, so genügt es, die neuen Vertikalprojektionen zweier ihrer Punkte zu verbinden; als den einen dieser Punkte kann man den horizontalen Spurpunkt nehmen, da ja $\overline{T}_1''$ nichts anderes ist als der Fußpunkt des von T_1 auf $\bar{a}_{12}$ gefällten Lotes. Hat man demnach auf g einen Punkt $P \equiv (P', P'')$ gewählt und $\overline{P}''$ gefunden, so ist $\bar{g}'' \equiv \overline{P}''\overline{T}_1''$. — Aus dem Obigen ergibt sich nun das Verfahren, die neue Darstellung einer Ebene zu finden, die durch zwei sich schneidende Geraden oder eine Gerade und die Affinitätsachse gegeben ist. Versuchen wir dieselbe Aufgabe für eine Ebene τ zu lösen, die durch ihre Spuren t_1 und t_2 gegeben ist. Da $\bar{t}_1$ mit t_1 zusammenfällt, so wird $\bar{t}_2$ durch den Punkt $t_1\bar{a}_{12} \equiv \overline{T}_{12}$ gehen müssen. Beachten wir nun, daß die neue Vertikalspur $\bar{t}_2$ nur die Umlegung in die Grundrißebene jener Geraden i ist, in welcher die neue Aufrißebene $\bar{\pi}_2$ die Ebene τ schneidet; dann ist die erste Spur von $\bar{\pi}_2$ die Gerade $v_1 \equiv \bar{a}_{12}$, die zweite v_2 die in O auf a_{12} errichtete Senkrechte; i hat daher als ver-

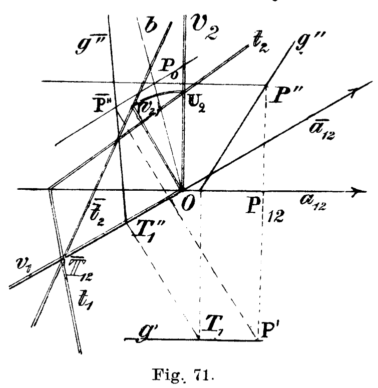


Fig. 71.

1) Die bei anderen Voraussetzungen eintretenden Modifikationen kann der Leser leicht auffinden.

tikale Spur den Punkt $U_2 \equiv t_2 v_2$. Wird nun die Ebene $[v_1, v_2]$ in die Aufrißebene umgelegt, so kommt der Punkt U_2 in (U_2) zu liegen auf der in O zu v_1 errichteten Senkrechten im Abstande $\overline{O(U_2)} = \overline{O U_2}$, auf der positiven Seite von $\bar{a}_{12}$, wenn auch u_2 sich auf der positiven von a_{12} befindet[1]). Verbindet man nun (U_2) mit $\overline{T}_{12}$, so bekommt man $\bar{t}_2$.

In einer ganz analogen Weise hätte man zu verfahren, wenn man nur die Aufrißebene verlegen wollte.

Zur Übung: Die beiden Projektionsebenen π_1, π_2 sollen durch zwei andere zueinander rechtwinklige ersetzt werden, die auch durch die ursprüngliche Achse gehen (mit Benutzung des Seitenrisses).

Um sofort zu zeigen, wie die Verlegung der Projektionsebenen zur Erleichterung der Lösung metrischer Probleme dienen kann[2]), nehmen wir nochmals die folgende

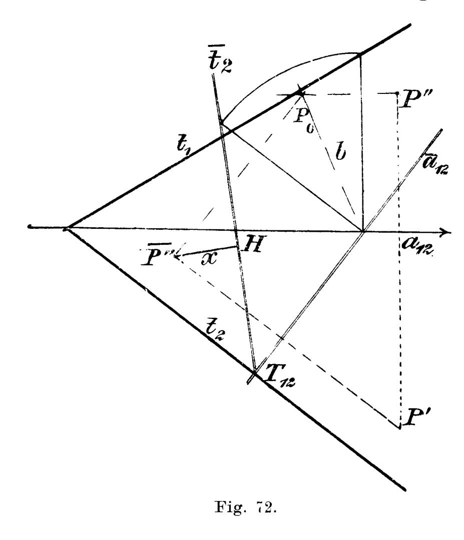


Fig. 72.

Aufgabe: Den Abstand eines Punktes $P \equiv (P', P'')$ von einer Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$ zu bestimmen (Fig. 72).

Wir nehmen als neue Vertikalebene $\bar{\pi}_2$ eine zu t_1 senkrechte; die neue Achse $\bar{a}_{12}$ wird also eine beliebige zu t_1 senkrechte Gerade. Wir suchen jetzt $\bar{t}_2$ und $\bar{P}''$. Da nun die Ebene τ zu der neuen Aufrißebene senkrecht steht, so ist (vgl. Nr. 38 Schlußaufg.) der gesuchte Abstand x der des Punktes $\bar{P}''$ von der Geraden $\bar{t}_2$.

Zur Übung: Den Abstand zweier parallelen Ebenen mittels Verlegung einer Projektionsebene und Anwendung der II. Übungsaufgabe in Nr. 38 zu finden.

49. Eine ganz besondere Bedeutung erlangen die vorigen Entwicklungen bei dem folgenden

Satz: Durch mehrfache und geeignete Verlegungen einer der Projektionsebenen kann man das ursprüngliche Paar π_1, π_2 durch ein beliebiges anderes Paar von zueinander senkrechten Ebenen $\bar{\pi}_1$, $\bar{\pi}_2$ ersetzen.

Beweis: Die beiden gegebenen Systeme seien S und $\bar{S}$. Be-

1) (U_{12}) ist überdies der zu U_{12} in bezug auf die Gerade b symmetrische Punkt.

2) Weitere Anwendungen ganz anderer Art werden wir im II. Bande finden.

trachten wir eine beliebige Hilfsebene π, die senkrecht zur Geraden $\pi_1 \bar{\pi}_1$ ist, so kann man durch diese, da sie senkrecht zu π_1 ist, die ursprüngliche Vertikalebene π_2 nach dem dargelegten Verfahren ersetzen; das so entstandene Projektionssystem sei T. Nun ist gemäß der Konstruktion π senkrecht zu $\bar{\pi}_1$, also kann man, wie oben, wieder ein neues System U erhalten, das als Fundamentalebenen $\bar{\pi}_1$ und π hat. Und schließlich, da sowohl π als auch $\bar{\pi}_2$ senkrecht zu $\bar{\pi}_1$ sind, so kann man in dem letzteren die Ebene π ersetzen durch $\bar{\pi}_2$ und gelangt so, wie gewünscht, zu $\bar{S}$. — Der größeren Deutlichkeit halber wollen wir den Übergang von S in $\bar{S}$ noch einmal symbolisch hinschreiben: $S(\pi_1 \pi_2)$, $T(\pi_1 \pi)$, $U(\bar{\pi}_1 \pi)$, $\bar{S}(\bar{\pi}_1 \bar{\pi}_2)$.

Diese Beweisführung, so sehr sie auch theoretisch wichtig ist, liefert jedoch nicht die bequemste Lösung des allgemeinen Problems der Verlegung der Projektionsebenen; praktisch ist folgendes vorzuziehen:

Angenommen, man wolle als neue Grundrißebene die Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$ nehmen und als Achse jene Gerade dieser Ebene, die sich

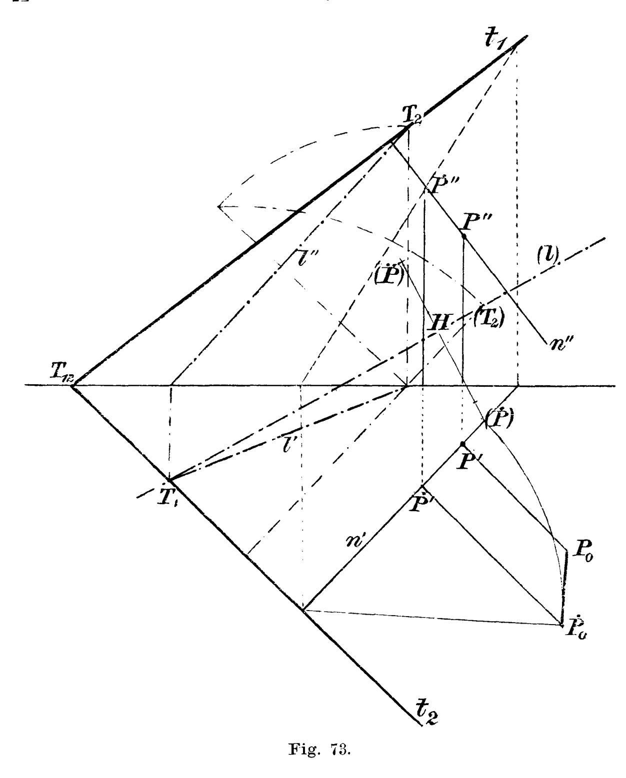


Fig. 73.

im Grundriß als l' abbildet (Fig. 73). Man stelle sich nun die neue Aufrißebene vor als umgelegt auf die τ und dann diese auf die alte

Grundrißebene gelegt. Es sei nun P ein beliebiger Punkt des Raumes, P' und P'' seine alten, $\dot{P}$ und $\ddot{P}$, $(\dot{P})$ und $(\ddot{P})$ die neuen Projektionen bzw. Umlegungen. $\dot{P}$ ist dann der Fußpunkt des von P auf τ gefällten Lotes n; wir können also (nach Nr. 31) seine Projektionen $\dot{P}'$ und $\dot{P}''$ konstruieren, ebenso die Lage $(\dot{P})$, die er annimmt, wenn τ in die Zeichenebene niedergelegt ist. Wir bestimmen die entsprechende Umlegung (l) der neuen Achse, ebenso die Länge $\overline{P_0 \dot{P}_0}$ der Strecke $\overline{P\dot{P}}$. Fällen wir dann von $(\dot{P})$ das Lot $(\dot{P})H$ auf (l) und tragen auf diesem von H aus die Strecke $\overline{P\dot{P}}$ ab, so ist der Endpunkt $(\ddot{P})$. Der Sinn, in welchem man die Strecke abträgt, ist beliebig, wenn es sich um einen einzelnen Punkt handelt, je nach dem Sinne, in welchem man sich die Ebenen umgelegt denkt. Sind noch andere Punkte da, $Q\ldots$, so müssen $(\ddot{P})$ und $(\ddot{Q})$ sich auf derselben Seite von l befinden, wenn auch P und Q auf derselben Seite der τ liegen, und umgekehrt.

Damit ist die obige Aufgabe für den Punkt gelöst; man kann sie danach auch leicht für Geraden und Ebenen lösen.

Zur Übung: Den kürzesten Abstand zweier Geraden zu finden, indem man sie durch geeignete Verlegung der Projektionsebenen in eine der speziellen Lagen bringt, wie sie am Schluß von Nr. 32 gekennzeichnet wurden.

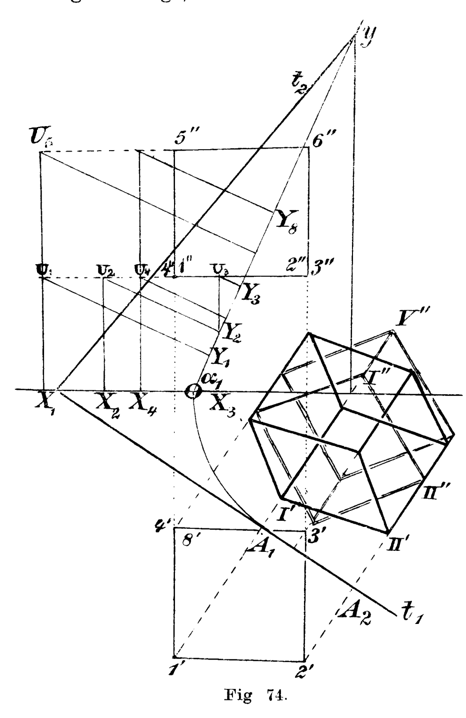


Fig 74.

An die Stelle der oben angegebenen Konstruktion kann man in dem Falle, daß man als neue Achse eine der Spurlinien von τ nimmt, eine noch einfachere setzen, deren Grundgedanke wir Tramontini verdanken. Bevor wir dazu übergehen, sei bemerkt, daß dieser Fall wichtig ist, weil, wenn man diese spezielle Transformation, durch Verlegung der Vertikalebene fortsetzt, man zu dem allgemeinen Falle gelangt.

Es seien (Fig. 74) $1'$ und $1''$ die beiden Projektionen eines beliebigen Punktes im Raume in bezug auf die Ebenen π_1 und π_2. I' sei seine Projektion auf die Ebene τ und I'' seine Projektion auf die Ebene, welche durch t_1 geht und zu τ recht-

winklig ist. Betrachten wir jetzt im Raume die Geraden $1\,1'$ und $1\,I'$, die von dem fraglichen Punkte auf die Ebenen π_1 und τ gefällt sind, so bestimmen sie eine zu t_1 in einem gewissen Punkte O senkrechte Ebene. Das Viereck $O1'1I'$ hat bei $1'$ und I' rechte Winkel, während sein Winkel bei O die Neigung α_1 von τ gegen die Grundrißebene ist (oder dessen Nebenwinkel); seine Seite $1'O$ ist gleich dem Abstande von $1'$ von t_1, während $1\,1'$ gleich der ursprünglichen ersten Kote des betrachteten Punktes ist; damit ist dieses Viereck bestimmt, somit kennt man auch die beiden anderen Seiten. Nun sind diese OI', der Abstand der neuen Horizontalprojektion des Punktes 1 von der neuen Projektionsachse, und $1\,I'$, die neue Horizontal-Kote desselben Punktes. Beachtet man nun, daß 1 und I' sich auf derselben (windschiefen) Senkrechten zu t_1 befinden, so hat man damit ein Mittel, sowohl I' als auch I'' zu konstruieren. Soll die angegebene Transformation auf mehrere Punkte angewendet werden, so kann man die Konstruktion zweckmäßig in folgender Weise ausführen: Man nehme auf der Achse einen Anfangspunkt O und einen positiven Sinn Ox an und ziehe durch O eine Gerade, deren positive Richtung Oy mit Ox den Winkel α_1 bildet; auf Ox trage man von O aus Ox_1, Ox_2, $Ox_3\ldots$ gleich dem Abstande der Punkte $1'$, $2'$, $3'\ldots$ von t_1 ab, im positiven oder negativen Sinne, je nachdem die Punkte auf der einen oder anderen Seite von t_1 liegen; alsdann errichte man die Senkrechten X_1U_1, $X_2U_2,\ldots$ in dem Gebiete von Oy oder im anderen Gebiete, je nachdem die Horizontal-Koten positiv oder negativ sind, und zwar gleich diesen. Dann fällt man von U_1, $U_2\ldots$ die Lote U_1Y_1, $U_2Y_2\ldots$ auf Oy. Diese trägt man dann auf den von $1'$, $2'$, $3'\ldots$ auf t_1 gefällten Loten von deren Fußpunkten $A_1A_2\ldots$ ab und erhält so die Punkte I'', II'', III'', während man I', $II'\ldots$ erhält, wenn man OY_1, OY_2 abträgt. Man beachte, daß die neue Kote positiv oder negativ ist, je nachdem U_1 auf der einen oder anderen Seite von Oy liegt; ferner, daß I' auf der einen oder anderen Seite von t_1 liegt, je nachdem Y_1, $Y_2\ldots$ auf Oy sich befinden oder auf der Verlängerung. In Fig. 74 ist dies Verfahren auf den Würfel mit den Ecken $1, 2, 3\ldots 8$ angewendet.

Schlußwort über die Wechselhilfe zwischen der darstellenden und der elementaren analytischen Geometrie.

50. Grundriß-, Aufriß- und Seitenrißebene eines Mongeschen Systems bilden ein dreirechtwinkliges Dreiflach. Wir nehmen den Scheitel als Anfangspunkt eines kartesischen Koordinatensystems, die Grundlinie als x-Achse, in positivem Sinne durchlaufen, als Achse der y und z den Schnitt der Seitenrißebene mit der Grund- und Aufrißebene. Alsdann nehmen wir eine beliebige lineare Maßeinheit. Dann

hat jeder Punkt als Koordinaten y und z, die Vertikal- und Horizontal-Koten, während seine Abszisse x die Maßzahl des Abstandes des Ordinatenfußpunktes vom Koordinatenanfang ist. Und umgekehrt, sind die Koordinaten eines Punktes gegeben, so kann man leicht seine Projektionen finden. So kennt man auch von jeder Geraden, die durch ihre Projektionen gegeben ist, die Gleichungen und umgekehrt; von jeder Ebene, deren Gleichung gegeben ist, kann man die Spurlinien zeichnen und umgekehrt. Somit kann jedes Problem der Raumgeometrie sowohl rechnerisch als auch zeichnerisch gelöst werden; löst man es auf beide Weisen, so gelangt man damit in den Besitz einer wertvollen Kontrolle (vgl. auch die erste Fußnote zu Nr. 27).

Wir geben hier einige Zahlenbeispiele, auf welche die obigen Bemerkungen anwendbar sind[1]), und empfehlen dem Leser, sie sowohl analytisch, als auch mit Hilfe der in diesem Werke dargelegten Verfahren zu lösen und sich dabei der größten Genauigkeit zu befleißigen, um möglichst übereinstimmende Resultate zu erhalten:

I. Gegeben: Die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes P. Gesucht: Der Radiusvektor r und dessen Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (Nr. 39a).

Beispiel:

$$x = 0{,}43, \quad y = 0{,}32, \quad z = 0{,}38.$$

II. Gegeben: Der Radiusvektor r eines Punktes P und seine Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, sowie das Vorzeichen von $\cos\gamma$. Gesucht: Die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z des Punktes P (Nr. 39, VIII).

Beispiel:

$$r = 0{,}816, \quad \cos\alpha = 0{,}760, \quad \cos\beta = 0{,}335, \quad \cos\gamma = +.$$

III. Gegeben: Der Radiusvektor r eines Punktes P und die Verhältniszahlen der Richtungskosinus $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = a : b : c$. Gesucht: Die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z des Punktes P (Nr. 39, VIII).

Beispiel:

$$r = 0{,}587, \quad a = 7{,}33, \quad b = 3{,}51, \quad c = -6{,}73.$$

IV. Die Entfernung zweier durch ihre Koordinaten gegebener Punkte P_1, P_2 und die Richtungskosinus ihrer Verbindungslinie zu finden (Nr. 35, I; 46, I).

Beispiel:

$$x_1 = 0{,}098, \quad y_1 = 0{,}315, \quad z_1 = 0{,}522,$$
$$x_2 = 0{,}532, \quad y_2 = 0{,}487, \quad z_2 = 0{,}240.$$

---

1) Sie sind dem Werke von F. Schilling entnommen, *Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie* (Leipzig und Berlin 1904), S. 14—16.

V. Die durch die Gleichung $ax + by + cz = d$ gegebene Ebene darzustellen, sowie die Achsenabschnitte u, v, w, die Länge l des vom Koordinatenanfangspunkte auf die Ebene gefällten Lotes und seine Richtungskosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ zu finden (Nr. 40c).

Beispiel:

$$a = 67{,}6, \quad b = 83{,}9, \quad c = 56{,}6, \quad d = 33{,}7.$$

VI. Die durch die Gleichung $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = l$ gegebene Ebene τ darzustellen und ihre Achsenabschnitte u, v, w zu finden, wenn l, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ durch bestimmte Zahlwerte und das Vorzeichen von $\cos\gamma$ gegeben sind (Nr. 40c).

Beispiel:

$$l = 0{,}382, \quad \cos\alpha = 0{,}709, \quad \cos\beta = 0{,}513, \quad \cos\gamma = +.$$

VII. Die durch die Gleichungen $\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma}$ gegebene Gerade darzustellen und die Koordinaten ihrer Schnittpunkte mit den Koordinatenebenen zu bestimmen (Nr. 11).

Beispiel:

$$x_0 = 0{,}513, \quad y_0 = 0{,}178, \quad z_0 = 0{,}236,$$
$$\cos\alpha = 0{,}627, \quad \cos\beta = 0{,}452, \quad \cos\gamma = -.$$

VIII. Den Kosinus des Winkels zu finden, den die positiven Richtungen der beiden Geraden

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha_1} = \frac{y - y_0}{\cos\beta_1} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma_1}, \quad \frac{x - x_0}{\cos\alpha_2} = \frac{y - y_0}{\cos\beta_2} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma_1}$$

miteinander bilden (Nr. 39 VII).

Beispiel:

$$x_0 = 0{,}778, \quad y_0 = 0{,}612, \quad z_0 = 0{,}530,$$
$$\cos\alpha_1 = 0{,}550, \quad \cos\beta_1 = 0{,}613, \quad \cos\gamma_1 = +$$
$$\cos\alpha_2 = -0{,}620, \quad \cos\beta_2 = 0{,}465, \quad \cos\gamma_2 = +.$$

IX. Zwei Ebenen sind durch die Gleichungen $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ gegeben, man soll die Richtungskosinus ihrer Schnittgeraden und deren Spurpunkte bestimmen (Nr. 39a).

Beispiel:

$$a_1 = 0{,}211, \quad b_1 = 0{,}218, \quad c_1 = 0{,}375, \quad d_1 = 0{,}165,$$
$$a_2 = 0{,}366, \quad b_2 = -0{,}570, \quad c_2 = 0{,}138, \quad d_2 = 0{,}085.$$

X. Zwei Ebenen sind durch die Gleichungen $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ gegeben, man soll den Kosinus des spitzen Winkels der beiden Ebenen bestimmen (Nr. 40, IX).

Beispiel:

$$a_1 = 0{,}300, \quad b_1 = 0{,}268, \quad c_1 = 0{,}402, \quad d_1 = 0{,}240$$
$$a_2 = 0{,}267, \quad b_2 = -0{,}302, \quad c_2 = -0{,}276, \quad d_2 = -0{,}115.$$



XI. Den Schnittpunkt der drei Ebenen

$$20x + 21y + 49z = 17,$$
$$75x + 69y + 63z = 46,$$
$$15x - 40y - 18z = -8$$

zu finden (Nr. 27).

XII. Gegeben: Zwei Geraden $\frac{x - x_1}{\cos \alpha_1} = \frac{y - y_1}{\cos \beta_1} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma_1}$, $\frac{x - x_2}{\cos \alpha_2} = \frac{y - y_2}{\cos \beta_2} = \frac{z - z_2}{\cos \gamma_2}$; gesucht der kürzeste Abstand ST der beiden Geraden, die Richtungskosinus $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ der Geraden ST und die Koordinaten der Fußpunkte S, T (Nr. 32; 35, I).

Beispiel:

$$x_1 = 2{,}019, \quad y_1 = 0{,}224, \quad z_1 = 0{,}517,$$
$$\cos \alpha_1 = 0{,}878, \quad \cos \beta_1 = 0{,}136, \quad \cos \gamma_1 = +$$
$$x_2 = 1{,}277, \quad y_2 = 0{,}212, \quad z_2 = 0{,}252,$$
$$\cos \alpha_2 = 0{,}618, \quad \cos \beta_2 = 0{,}585, \quad \cos \gamma_2 = -.$$ [1]

---

1) Weitere verwandte Beispiele finden sich in C. Beyel, *Darstellende Geometrie. Mit einer Sammlung von 1800 Dispositionen aus der darstellenden Geometrie* (Leipzig, 1901).

Zweites Buch.

Die Methode der Zentralprojektion.
(Freie Perspektive.)

Erstes Kapitel.

Allgemeines. Darstellung der Punkte, Geraden und Ebenen.

51. Aus der projektiven Geometrie dürfte das Wesen und der große theoretische Nutzen jener Operation bekannt sein, die man unter dem Namen der Zentralprojektion kennt. Wendet man sie auf eine Figur an, die in einer gegebenen Ebene liegt, so liefert sie uns ein Darstellungsverfahren, das in dem in der Einleitung Nr. 2 angegebenen Sinne auch eindeutig ist. Wendet man sie dagegen auf eine räumliche Figur an, so liefert sie uns eine ebene Figur, von der man aber nicht rückwärts ohne Zweideutigkeit auf die ursprüngliche Figur schließen darf. Es soll nun im folgenden gezeigt werden, daß die Zentralprojektion in geeigneter Weise modifiziert zu einer Methode der darstellenden Geometrie werden kann, die nicht weniger vollkommen ist, als diejenige, die wir im vorigen Buche dargelegt und angewendet haben.

Zu diesem Zwecke nehmen wir in endlicher Entfernung einen festen Punkt C an, das Projektionszentrum (Augenpunkt) und eine feste Ebene π, die nicht durch C geht, die Projektionsebene oder Bildebene (das Zeichenblatt). Um die gegenseitige Lage dieser beiden Grundelemente festzulegen, betrachten wir den Fußpunkt C_0 des von C auf die Bildebene gefällten Lotes[1]); er heißt der Hauptpunkt, während wir die Entfernung $\overline{CC_0}$ die Distanz oder den Abstand nennen und immer mit d bezeichnen wollen; die Gerade CC_0 wird auch wohl als die Sehachse bezeichnet. Ist C_0 und d bekannt, so kennt man auch den Kreis Δ mit dem Radius d und dem Zentrum C_0; ist umgekehrt dieser Kreis gezeichnet, so kennt man auch den Mittelpunkt C_0 und seinen Radius d; daher wird C einer der beiden Punkte sein, in denen die in C_0 auf π errichtete Senkrechte den Kreis trifft; man kann den einen oder anderen, aber ein für allemal wählen. Die Ebene π teilt den ganzen Raum in zwei unbegrenzte Gebiete; wir wollen dasjenige, in welchem sich C befindet, das

1) Im allgemeinen wollen wir mit $\mathfrak{F}_0$ die Orthogonalprojektion einer beliebigen Figur $\mathfrak{F}$ auf die Bildebene bezeichnen, jedoch mit $\mathfrak{F}'$ die Zentralprojektion von C aus.



positive, das andere das negative Gebiet nennen. Den „Distanzkreis" Δ wollen wir uns immer auf der positiven Seite von π gezeichnet denken.

52. Es sei P ein beliebiger von C verschiedener Punkt des Raumes; der projizierende Strahl CP schneidet die Bildebene in einem einzigen, bestimmten Punkte P', der die Zentralprojektion, das Schaubild oder kurz das Bild von P heißt. (Ebenso ist P' aber auch das Bild aller auf der Geraden CP gelegenen Punkte.) P' ist immer verschieden von P, ausgenommen, wenn P in der Bildebene liegt; P' liegt im allgemeinen auch in endlicher Entfernung, ausgenommen, wenn P in der durch C zu π parallel gelegten Ebene π^* sich befindet. Diese neue Ebene, die wir noch öfter zu betrachten nötig haben, trägt den Namen vordere Parallelebene oder Verschwindungsebene; die zu π^* in bezug auf π symmetrische Ebene π^{**} heißt hingegen die hintere Parallelebene oder Gegenebene.

Es sei ferner g eine beliebige nicht durch C gehende Gerade des Raumes. Die sie projizierende Ebene Cg schneidet die Bildebene in einer einzigen bestimmten Geraden g', welche die Projektion oder das Bild von g ist; ebenso ist aber diese Gerade auch das Bild aller in der projizierenden Ebene liegenden Geraden. g' fällt dann und nur dann mit g zusammen, wenn g in der Bildebene liegt; sie liegt im Unendlichen nur, wenn g in der Verschwindungsebene liegt.

Es ist klar: **Wenn ein Punkt und eine Gerade inzident sind, so findet dies auch für ihre Projektionen von irgend einem Zentrum auf eine beliebige Ebene statt.** Jedoch ist die Umkehr dieses Satzes offenbar nicht richtig; man kann nur sagen: **Wenn die Projektion eines Punktes auf der entsprechenden einer Geraden liegt, so liegt dieser Punkt in der die Gerade projizierenden Ebene**; oder mit anderen Worten: **Die Gerade trifft den Projektionsstrahl des Punktes**; oder endlich: **Der Projektionsstrahl des Punktes liegt in der Projektionsebene der Geraden.** Man kann jedoch hinzufügen: Wenn das Zusammenfallen der Projektion eines Punktes mit der entsprechenden Projektion einer Geraden stattfindet für zwei verschiedene Systeme, so liegt der betr. Punkt auf der betr. Geraden.

Das der Ebene Cg (die die Gerade g von C aus projiziert) duale Element ist der Punkt πg, in welchem g die Bildebene schneidet. Diesen sehr bemerkenswerten Punkt nennen wir den Spurpunkt der Geraden (vgl. Nr. 11) und bezeichnen ihn gewöhnlich mit T (oder T_1, T_2 ... oder V, U, usw.). Aus dieser Definition ergeben sich sofort folgende Sätze: **Der Spurpunkt einer Geraden ist der einzigste Punkt, der mit seinem Schaubilde zusammenfällt. Er fällt ins Unendliche nur, wenn die Gerade zur Bildebene parallel ist. Das Bild einer Geraden geht durch ihren Spurpunkt. In den Spurpunkt eines Projektionsstrahles fallen die Projektionen aller seiner Punkte zusammen.**

53. Zu einem anderen bemerkenswerten Punkte für eine beliebige Gerade des Raumes gelangt man auf folgende Weise: Es sei g eine weder durch das Projektionszentrum gehende, noch zur Bildebene parallele Gerade, T und T^* (Fig. 75) ihre Schnitte mit den Ebenen π und π^*. Indem wir jedem beliebigen Punkte P von g seine Projektion P' auf g' entsprechen lassen, werden g und g' zu Trägern zweier in bezug auf C perspektivischer Punktreihen. In dieser Korrespondenz ist T der Doppelpunkt; dem unendlich fernen Punkte I auf g entspricht aber auf g' der Punkt I', in welchem die durch C zu g gezogene Parallele p die π schneidet, hingegen dem unendlich fernen Punkte von g' entspricht der Punkt T^*, in welchem die Verschwindungsebene von der g getroffen wird. I' und T^* sind also die beiden Fluchtpunkte der Punktreihen g und g'. Der erstere dieser Punkte heißt der Fluchtpunkt der Geraden g. **Der Fluchtpunkt einer Geraden ist demnach der Spurpunkt der zu der Geraden durch das Zentrum gezogenen Parallelen auf der Bildebene.** Für eine zur Bildebene parallele Gerade geht der Fluchtpunkt ins Unendliche, während er für einen Projektionsstrahl mit dessen eigenem Spurpunkte zusammenfällt. — Aus der Definition des Fluchtpunktes ergibt sich:

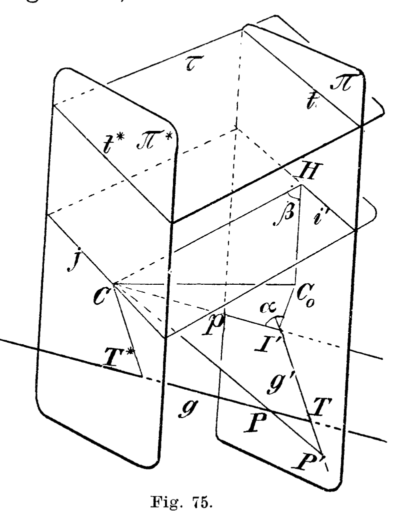


Fig. 75.

Parallele Geraden haben denselben Fluchtpunkt, und umgekehrt. Jede Gerade des Raumes hat nicht nur einen bestimmten Spurpunkt, sondern auch einen bestimmten Fluchtpunkt. Umgekehrt: **Wählt man beliebig auf der Bildebene zwei Punkte T und I', so kann man diese immer als Spur- und Fluchtpunkte einer bestimmten Geraden des Raumes auffassen** (nämlich der durch T zu CI' gezogenen Parallelen).

Aus dem Vorhergehenden ergeben sich nun auch leicht folgende Sätze:

I. Die Projektion zweier sich schneidender Geraden gibt im allgemeinen wieder zwei sich schneidende Geraden, schneiden sie sich aber in der Verschwindungsebene, so besteht die Projektion aus zwei parallelen Geraden.

II. Projiziert man zwei zueinander parallele Geraden, so erhält man zwei sich schneidende oder parallele Geraden, je nachdem die betreffenden Geraden nicht parallel oder parallel zur Bildebene sind.

III. Projiziert man zwei windschiefe Geraden, so erhält man auf der Bildebene im allgemeinen zwei sich schneidende, dagegen zwei parallele Geraden dann und nur dann, wenn die Spuren der beiden betreffenden Geraden auf der Verschwindungsebene in gerader Linie mit dem Projektionszentrum liegen.

54. Die Betrachtungen, die uns bei der Geraden zu den Begriffen des Spur- und des Fluchtpunktes führten, führen in geeigneter Weise modifiziert uns zu ähnlichen Begriffen bei der Ebene, wie wir jetzt zeigen wollen. Die Schnittlinie einer beliebigen Ebene τ mit der Bildebene ist der geometrische Ort der Spurpunkte aller in ihr gelegenen Geraden; sie heißt die Spurlinie der Ebene (vgl. Nr. 13), und wir wollen sie gewöhnlich mit t oder $t_1, t_2 \ldots u, v$ usw. bezeichnen. Sie liegt nur dann im Unendlichen, wenn τ parallel zur Bildebene ist. **Liegt eine Gerade g in einer Ebene τ, so fällt die Spur von g auf die Spurlinie von τ**; die Umkehrung dieses Satzes ist jedoch offenbar nicht richtig. Für eine projizierende Ebene aber fallen die Projektionen aller ihrer Punkte und Geraden in die Spurlinie. Nehmen wir den Fall, daß τ weder durch das Projektionszentrum noch parallel zur Bildebene laufe, und lassen wir jedem Punkte P von τ seine Projektion P' entsprechen, so werden τ und π die Träger zweier ebener perspektiver Systeme. Die Spurlinie t von τ ist die Perspektivitätsachse; der unendlich fernen Geraden i von τ entspricht die Spurlinie i' der durch C zu τ parallel gelegten Ebene mit der π, während der unendlich fernen Geraden von π die Gerade t^* entspricht, in welcher die betrachtete Ebene die Verschwindungsebene schneidet. i' und t^* sind demnach die Fluchtlinien der beiden Systeme τ und π (s. Fig. 75). Die erstere heißt die Fluchtgerade der gegebenen Ebene. **Die Fluchtgerade einer Ebene ist also die Spur der zu ihr durch das Projektionszentrum parallel gelegten Ebene auf der Bildebene.** Sie ist zugleich der geometrische Ort der Fluchtpunkte aller in jener Ebene enthaltenen Geraden. Für eine zur Bildebene parallele Ebene liegt die Fluchtgerade im Unendlichen, während sie für eine projizierende Ebene mit deren Spurlinie zusammenfällt. Es ergeben sich nun leicht folgende Sätze: **Parallele Ebenen haben dieselbe Fluchtgerade** und umgekehrt. **Wenn eine Gerade und eine Ebene zueinander parallel sind, so liegt der Fluchtpunkt jener auf der Fluchtgeraden dieser** und umgekehrt.

Jede Ebene des Raumes hat eine bestimmte Spurlinie und eine bestimmte Fluchtgerade, und zwar sind beide immer zueinander parallel. Umgekehrt: **Zwei zueinander parallele Geraden t und i' in der Bildebene können immer als Spurlinie und Fluchtgerade einer bestimmten Ebene angesehen werden**, nämlich der durch τ parallel zur Ebene Ci' gelegten.

Anmerkung. Geht eine Ebene τ durch eine Gerade g, so gehen die Spurlinie t und die Fluchtgerade i' jener durch die Spur T und den Fluchtpunkt I' dieser; insbesondere wenn g eine zur Bildebene parallele Gerade ist, so fallen T und I' ins Unendliche, daher sind dann t und i' zu g' parallele Geraden. **Daher sind die Spurlinie und die Fluchtgerade einer durch eine zur Bildebene parallele Gerade gehenden Ebene Parallele zu der Projektion jener Geraden.**

55. In Nr. 53 wurde bemerkt, daß, wenn eine Gerade gegeben ist, man ihren Spur- und Fluchtpunkt kennt, und umgekehrt, wenn jene beiden Punkte beliebig gegeben werden, dadurch die Gerade eindeutig bestimmt sei. Daraus folgt, **daß man zur Darstellung einer Geraden ihren Spurpunkt T und ihren Fluchtpunkt I' nehmen kann;** durch die Schreibung $g \equiv (TI')$ wollen wir nun symbolisch ausdrücken, daß g jene Gerade sei, die T als Spurpunkt und I' als Fluchtpunkt hat. T und I' heißen die **Bestimmungs-** oder **Darstellungs-Elemente** der Geraden; den Abstand dieser beiden Punkte wollen wir das **Intervall** der Geraden nennen.

Ist P ein beliebiger Punkt von g, so wird seine Projektion P' ein bestimmter Punkt von g' sein; umgekehrt: Sind die beiden Punkte T und I', sowie der Punkt P' auf ihrer Verbindungslinie gegeben, so ist dadurch der Punkt P bestimmt; er ist nämlich der Punkt, in welchem der Projektionsstrahl CP' die Gerade g trifft. Damit haben wir ein Mittel, die sämtlichen Punkte P des Raumes auf der Bildebene darzustellen, und dies können wir symbolisch ausdrücken durch die Schreibung $P \equiv (TI', P')$, wobei immer einbegriffen ist, daß die drei Punkte T, I', P' in gerader Linie liegen. Es ist klar, daß ein beliebiger Punkt des Raumes ∞^2 solche Darstellungen zuläßt, da man ihn als auf jeder der durch ihn gehenden ∞^2 Geraden ansehen kann. Wenn P der Verschwindungsebene angehört, so liegt P im Unendlichen, was wir dann durch $P \equiv (TI', P'_\infty)$ ausdrücken wollen.

Die angegebene Darstellungsweise der Geraden des Raumes erfordert in speziellen Fällen besondere Vermerke:

a) Ein Projektionsstrahl r ist hinlänglich durch seinen Spurpunkt T bestimmt, wir drücken dies durch die Schreibung $r \equiv (T)$ aus.

b) Wenn insbesondere jener Projektionsstrahl in der Verschwindungsebene liegt, so liegt T im Unendlichen, aber in einer gewissen Richtung, mit anderen Worten: es ist dann r der zu einer bestimmten Geraden a' der Bildebene parallele Projektionsstrahl. Dies wollen wir ausdrücken, indem wir schreiben $r \equiv (a')$.

c) Eine Gerade der Bildebene hat sich selbst als Projektion; ihr Spurpunkt ist unbestimmt, ihr Fluchtpunkt unendlich fern.

d) Eine zur Bildebene parallele Gerade g ist durch ihre Projek-

tion g' und einen ihrer Punkte $P \equiv (TI', P')$ bestimmt; g ist nämlich dann die durch P zu g' gezogene Parallele. Wir schreiben dies daher $g \equiv (g'; TI', P')$, immer einbegriffen, daß P' der Schnittpunkt der Geraden g' und TI' ist.

e) Eine beliebige Gerade der Verschwindungsebene wird man zweckmäßig durch zwei ihrer Punkte P und Q bestimmen, deren Projektionen allerdings im Unendlichen liegen; wir schreiben daher $g \equiv (TI', P'_\infty; UJ', Q'_\infty)$, um auszudrücken, daß g die beiden Punkte $P \equiv (TI', P'_\infty)$ und $Q \equiv (UJ', Q'_\infty)$ verbindet.

56. In Nr. 54 wurde bemerkt: Wenn man eine Ebene kennt, so hat man damit ihre Spurlinie und Fluchtgerade; nimmt man umgekehrt auf der Bildebene zwei beliebige parallele Geraden, die eine als Spurlinie, die andere als Fluchtgerade einer Ebene, so ist diese dadurch eindeutig bestimmt. Daraus folgt, **daß man eine Ebene τ darstellen kann, wenn man ihre Spurlinie t und ihre Fluchtgerade i' beliebig annimmt,** wenn nur jene beiden Geraden einander parallel sind. Durch die Schreibung $\tau \equiv [ti']$ wollen wir nun symbolisch ausdrücken, daß τ jene Ebene sei, deren Spurlinie t und deren Fluchtgerade i' ist, vorausgesetzt, daß t und i' einander parallel sind. t und i' wollen wir die **Bestimmungs- oder Darstellungs-Elemente** der Ebene nennen. Ist insbesondere τ eine projizierende Ebene, so genügt die Spur t zu ihrer Bestimmung; in diesem Falle schreiben wir $\tau \equiv [t]$. Diese Art der Darstellung wird hinfällig, wenn es sich um Ebenen handelt, die parallel zur Bildebene sind, weil dann t und i' mit der unendlich fernen Geraden der Bildebene zusammenfallen. Aber eine solche Ebene ist offenbar auch bestimmt durch einen einzigen ihrer Punkte $P \equiv (TI', P')$, daher wollen wir hier schreiben $\tau \equiv [TI', P]$, indem wir darunter verstehen, daß τ die durch P zu π parallel gelegte Ebene ist.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich noch eine neue Methode, Punkte des Raumes darzustellen, die darin besteht, sie durch ihre Projektion und eine durch sie gehende Ebene zu bestimmen; jeder Punkt kann somit auf ∞^2 derartige Weisen dargestellt werden. Durch die Schreibweise $P \equiv (ti', P')$ wollen wir ausdrücken, daß P jener Punkt der Ebene $[ti']$ sei, in welchem diese von dem Projektionsstrahle CP' getroffen wird.

In ähnlicher Weise ergibt sich daraus ein, von dem in voriger Nummer dargestellten verschiedenes, Verfahren, eine zur Bildebene parallele Gerade darzustellen. Zu diesem Zwecke beachten wir, daß eine derartige Gerade durch ihre Projektion g' und irgend eine sie enthaltende Ebene $[ti']$ bestimmt ist, vorausgesetzt, daß t, i', g' einander parallele Geraden sind (vgl. den Schluß von Nr. 54); wir schreiben $g \equiv (ti', g')$. Liegt jedoch g in der Verschwindungsebene, so geht g' ins Unendliche, und indem wir dann $g \equiv (ti')$

schreiben, soll dadurch ausgedrückt werden, daß g jene Gerade ist, in welcher die Ebene $[ti']$ die Ebene π^* schneidet.

57. Aus den oben gemachten Annahmen und Definitionen wollen wir nun sogleich eine Reihe von Folgerungen ziehen.

I. Haben zwei Geraden g_1 und g_2 denselben Fluchtpunkt I', so sind sie einander parallel und bestimmen eine Ebene, die als Spurlinie die Gerade t hat, die die Spurpunkte von g_1 und g_2 verbindet und als Fluchtgerade die durch I' zu t gezogene Parallele.

II. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Geraden, von denen keine der Bildebene parallel ist[1]), sich schneiden, ist, daß die Verbindungslinie ihrer Spurpunkte parallel zu der ihrer Fluchtpunkte ist; diese Geraden sind dann die Bestimmungselemente der Ebene jener beiden Geraden und ihr Schnittpunkt projiziert sich in den Schnitt ihrer Projektionen[2]).

Zur Übung: Gegeben eine (TI', P') der ∞^2 Darstellungen eines Punktes; um eine beliebige andere (UJ', P') zu bestimmen, kann man beliebig einen der Punkte U, J' wählen; oder auch die Gerade UJ' (durch P' gehend) und das Intervall $\overline{UJ'}$.

Aus den unter I und II gemachten Bemerkungen ergibt sich sogleich ein Verfahren, **durch einen gegebenen Punkt $P \equiv (TI', P')$ die Parallele zu einer gegebenen Geraden g zu ziehen**[3]).

Ist $g \equiv (UJ')$ nicht parallel zur Bildebene (Fig. 76), so hat die gesuchte Gerade x, weil parallel zu g, auch den Fluchtpunkt J'. Da x außerdem durch P gehen muß, so muß ihre Projektion durch P' gehen, x' ist also die Gerade $P'J'$. Nun gehen die beiden Geraden x und TI' durch denselben Punkt P, liegen also in derselben Ebene, deren Fluchtgerade $i' \equiv I'J'$ und deren Spurlinie die durch T zu i' gezogene Parallele ist. $T_x \equiv tx'$ wird der Spurpunkt der gesuchten Geraden sein, diese ist also $x \equiv (T_x J')$. Man beachte, daß bei dieser Lösung U nicht verwendet wird, wie es ja auch sein muß, da ja bei der betrachteten Geraden nur die Richtung in Betracht kommt. Ferner ist zu bemerken, daß die angegebene Konstruktion keine wesentlichen Änderungen erfährt, wenn P in der Verschwindungsebene liegt, also P' unendlich fern ist.

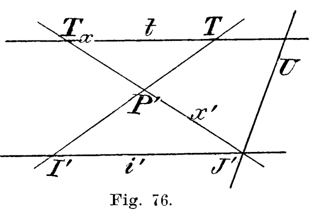


Fig. 76.

1) Bezüglich des hier ausgeschlossenen Falles s. Nr. 58, Anwendung.

2) Ist X der den beiden Geraden $(T_1 I_1')$ und $(T_2 I_2')$ gemeinsame Punkt, so ist offenbar, weil die Geraden $T_1 T_2$ und $I_1' I_2'$ einander parallel sind,

$$\frac{\overline{X'T_1}}{\overline{X'I_1'}} = \frac{\overline{X'T_2}}{\overline{X'I_2'}}.$$

3) Den Fall, daß P durch (ti', P') bestimmt ist, führt man auf den oben betrachteten zurück, indem man eine Hilfsgerade durch P in der Ebene $[ti']$ zieht.

Ist aber die Gerade g parallel zur Bildebene, so werden wir sie (nach Nr. 55 d) durch $g \equiv (g'; UJ', M')$ darstellen, oder (Nr. 56) durch $g \equiv (ti', g')$; da nun g und die gesuchte Gerade x beide zur Bildebene parallel sind, so ist x' parallel zu g' (Nr. 53 II), und da sie durch P gehen soll, so wird $x \equiv (x'; TI', P)$ sein.

III. Es seien T und T^* die Schnitte einer Geraden g mit den beiden Ebenen π und π^*; ziehen wir durch C die Parallele p zu g, so schneidet diese π in I' und in der die g projizierenden Ebene entsteht das Parallelogramm $CI'TT^*$. Die Gerade TI' ist das Bild g' von g, während T^*C der Schnitt der g projizierenden Ebene mit der Ebene π^* ist. Folglich: **Die Schnittlinie der eine Gerade projizierenden Ebene mit der Verschwindungsebene ist die durch das Projektionszentrum zur Projektion jener Geraden gezogene Parallele.** Dies beweist uns nun: **Haben zwei Geraden zwei einander parallele Bilder, so schneiden sich die sie projizierenden Ebenen in der Verschwindungsebene.**

IV. **Haben zwei Ebenen τ_1 und τ_2 als Spuren t_1 und t_2 (oder als Fluchtgeraden i_1' und i_2') zwei einander parallele Geraden, so müssen sie sich in einer zur Bildebene parallelen Geraden schneiden.** Die Gerade $\tau_1\tau_2$ trifft sowohl t_1 als auch t_2 und geht daher auch durch deren gemeinsamen unendlich fernen Punkt, d. h. sie wird parallel zu beiden sein, und somit zu ihrer gemeinsamen Ebene, d. i. der Bildebene. Fügen wir noch hinzu, daß die Projektion der Geraden $\tau_1\tau_2$ parallel zu den Spurlinien ist (s. Nr. 54). Die Umkehrung des Satzes ist offenbar auch zutreffend.

V. Ist $g \equiv (TI')$ eine beliebige Gerade, so sind die Strecken TI' und T^*C (vgl. Fig. 75) äquipollent (d. h. gleich und gleich gerichtet). Betrachten wir daher eine zweite Gerade $g_1 \equiv (T_1 I_1')$ von der Art, daß die beiden Strecken $\overline{TI'}$ und $\overline{T_1 I_1'}$ einander äquipollent sind, so wird die Strecke T^*C äquipollent mit beiden sein, und daher ist T^* der Schnitt von π^* sowohl mit g als auch mit g_1. Daraus folgt: **Bestimmen die Darstellungselemente zweier Geraden zwei einander äquipollente Strecken, so schneiden sich die Geraden selbst auf der Verschwindungsebene und umgekehrt.**

VI. Die Spurlinie t und die Fluchtgerade i' einer Ebene τ begrenzen auf der Bildebene einen Streifen, der eine bestimmte Breite hat. Betrachten wir als positiven Sinn derselben jenen, in welchem sich ein Punkt bewegt, der von t aus in senkrechter Richtung zu beiden Geraden auf i' zuläuft, dann können zwei solche Streifen mit einander parallelen Grenzlinien, die dieselbe Breite und denselben Sinn haben, durch einfache translatorische Verschiebung zur Deckung gebracht werden. Ist nun t^* die Schnittlinie von τ mit π^* und j die Schnittlinie von π^* mit der projizierenden Ebene, die parallel zu τ

läuft (s. Fig. 75), so sind offenbar die beiden Streifen ti' und t^*j von der besprochenen Art. Daraus ergibt sich, daß, wenn wir eine zweite Ebene $\tau_1 \equiv [t_1 i_1']$ betrachten und voraussetzen, daß die beiden Streifen ti' und $t_1 i_1'$ immer durch einfache Verschiebung zur Deckung gebracht werden können, wir in π^* denselben Streifen t^*j bekommen werden. Die Gerade t^* ist also die Schnittlinie von π^* sowohl mit τ als auch mit τ_1; die Ebenen τ, τ_1, π^* gehören also demselben Büschel an, folglich: **Bilden die Bestimmungselemente zweier Ebenen zwei Streifen, die sich durch translatorische Verschiebung zur Deckung bringen lassen, so schneiden sich diese Ebenen auf der Verschwindungsebene, und umgekehrt.** Ziehen wir hieraus eine Folgerung: Stellt man die Geraden der Ebene π^* auf die zum Schluß der vorigen Nummer angegebene Art dar, so erkennt man: **Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß (ti') und $(t_1 i_1')$ die Darstellungen derselben Geraden der Verschwindungsebene seien, ist, daß die beiden Streifen ti' und $t_1 i_1'$ durch einfache Verschiebung zur Deckung gebracht werden können.**

VII. Aus den beiden vorigen Sätzen kann man nun leicht folgendes ableiten: **Wenn eine Gerade $g \equiv (TI')$ und eine Ebene $\tau \equiv [ti']$ sich auf der Verschwindungsebene schneiden, und man zieht durch T und I' die Parallelen t_1 und i_1' zu t bzw. i', so kann der Streifen $t_1 i_1'$ durch einfache Verschiebung mit dem Streifen ti' zur Deckung gebracht werden; die Gerade TI' schneidet t und i' in zwei Punkten T_1 und I_1 derart, daß die Strecken TI' und $T_1 I_1$ äquipollent sind und umgekehrt.**

Diese Bedingung kann auch als notwendig und hinreichend angesehen werden dafür, daß die Gerade $g \equiv (TI')$ die Gerade $h \equiv (ti')$ der Verschwindungsebene trifft (vgl. Nr. 56 Schluß).

Aus dem oben Gesagten ergeben sich auch die Lösungen der beiden folgenden Aufgaben:

1. Den Punkt $P \equiv (TI', P')$ mit dem Spurpunkte der Geraden $g \equiv (T_1 I_1')$ auf der Verschwindungsebene zu verbinden.

Das Bild x' der gesuchten Geraden x ist die durch P' zu g' gezogene Parallele. Wir ziehen daher die Strecke $\overline{I'H}$ äquipollent mit $\overline{I_1'T_1}$ und bestimmen den Punkt T_x, in dem sich die Geraden TH und x' schneiden. Schließlich suchen wir den Punkt I_x', in welchem x' von der durch I' zu $T_x H$ gezogenen Parallelen getroffen wird. Dann ist $x \equiv (T_x I_x')$ die gesuchte Gerade.

2. Den Punkt $P \equiv (TI', P')$ mit der Spurlinie der Ebene $\tau \equiv [ti']$ auf der Verschwindungsebene (durch eine Ebene) zu verbinden.

Es sei $(T_1 I_1')$ eine beliebige Gerade g von τ, dann bestimmen wir (nach der vor. Aufg.) die Verbindungslinie $x \equiv (T_x I_x')$ des Punktes

P mit dem Spurpunkte der Geraden $(T_1 I_1')$ auf der Verschwindungsebene; die durch T_x und I_x' zu der Geraden t (oder auch i') gezogenen Parallelen sind die Bestimmungselemente der gesuchten Ebene. Ist P als (ti', P') gegeben, so tritt an Stelle dieser Konstruktion eine einfachere (m. s. Nr. 68).

Zur Übung: I. Zwei Geraden sind von der Beschaffenheit, daß der Spurpunkt der einen Fluchtpunkt der anderen ist; welche geometrische Beziehung besteht zwischen ihnen? — Man beantworte die analoge Frage für zwei Ebenen.

II. Man kennt die Projektionen von drei Punkten A, B, C einer Geraden $r \equiv (TI')$: den Wert λ des Verhältnisses $\overline{AC} : \overline{BC}$ zu finden. [Man beachte, daß: $AC : BC = (ABCI) = (A'B'C'I')$]. — Umgekehrt, wenn die Punkte $A'B'C'$ auf der Geraden r' gegeben sind und das Verhältnis λ, I' zu bestimmen [durch das Doppelverhältnis $(A'B'C'I') = \lambda$]; ebenso C' zu bestimmen, wenn man die Punkte A', B', I' und λ kennt.

III. Eine gegebene Strecke $\overline{AB}$ auf der Geraden $g \equiv (TI')$ in n gleiche Teile zu teilen. — [Ist X der erste Teilpunkt, so hat man $(A'B'X'I') = n : (1 - n)$, woraus sich X' ergibt].

IV. Den Schwerpunkt eines Dreieckes zu bestimmen, wenn man die Projektionen der Ecken und seine Ebene $\tau \equiv [ti']$ kennt.

V. Von einem Kegelschnitte Γ kennt man die Projektion Γ' und seine Ebene $\tau \equiv [ti']$. Den Mittelpunkt und seine Art zu finden.

VI. Auf einer Geraden $g \equiv (TI')$ ist eine Strecke $\overline{MN}$ gegeben: man soll diese verdoppeln, verdreifachen, vervierfachen, usw. — Ohne auf die in II enthaltene Methode zurückzugreifen, kann man auf folgende Weise verfahren: In einer beliebigen durch g gehenden Ebene τ ziehe man eine zu g parallele Gerade g_1. In derselben Ebene ziehe man durch M und N zwei zueinander parallele Gerade, die g_1 in M_1 und N_1 schneiden. Verbindet man M_1 mit N und zieht durch N_1 zu $M_1 N$ die Parallele, so erhält man auf g einen Punkt P von der Beschaffenheit, daß $\overline{NP} = \overline{M_1 N_1} = \overline{MN}$; daher ist $\overline{MP} = 2\,\overline{MN}$. Verbindet man dagegen N_1 mit M und zieht durch M_1 die Parallele zur Verbindungslinie, so erhält man einen Punkt $\overline{P}$ derart, daß $\overline{PM} = \overline{M_1 N_1} = \overline{MN}$, daher ist $\overline{PN} = 2\,\overline{MN}$. Zieht man dann PP_1 parallel zu NN_1 und $P_1 Q$ parallel zu $N_1 P$, so hat man $\overline{MQ} = 3\,\overline{MN}$ usw. — Um diese Konstruktion in der Bildebene auszuführen (Fig. 77), ziehe man durch I' zwei beliebige Geraden i' und g_1', welche das Bild von g_1 sein soll, während i' die Fluchtgerade von τ sein möge. Von einem beliebigen Punkte I_1' auf i' projiziere man M' und N' auf g_1' als M_1' und N_1'. Ist dann $I_2' \equiv M_1'N'\cdot i'$, so ist $P' \equiv I_2'N_1'\cdot g'$; während, wenn $I_3' \equiv M'N_1'\cdot i'$, $\bar{P}' \equiv I_3'M_1'\cdot g'$ sein wird. Ferner ist $P_1' \equiv P'I_1'\cdot g_1'$ usw.

Fig. 77.

Zweites Kapitel.

Koten und Neigungen.

58. Außer den in dem vorigen Kapitel besprochenen Darstellungselementen wird es sich als nützlich erweisen, auch metrische Elemente, die mit jedem Punkte, jeder Geraden und jeder Ebene des Raumes verknüpft sind, einzuführen.

Ist P ein Punkt des Raumes und nehmen wir eine beliebige Maßeinheit an, so bezeichnen wir als **Kote** (vgl. Nr. 6) von P die Zahl p, die den Abstand des Punktes P von der Bildebene angibt, und zwar ist sie positiv oder negativ, je nachdem P auf derselben oder der anderen Seite von π liegt, wo sich das Projektionszentrum C befindet. Zum Beispiel: Alle Punkte der Bildebene haben die Kote Null, alle der Verschwindungsebene π^* die Kote d, die der Gegenebene π^{**} die Kote $-d$. Betrachten wir einen beliebigen Punkt P der Geraden $g \equiv (TI')$, so haben wir auf dieser die vier Punkte T, T^*, P und I (im Unendlichen). Das Doppelverhältnis, das sie bilden, ist gleich dem ihrer Projektionen, daher hat man

$$(PT^*IT) = (P'T^{*\prime}I'T') \quad \text{oder} \quad (P'T^{*\prime}I'T') = (T^*PTI);$$

nun liegen die Punkte I und $T^{*\prime}$ im Unendlichen, daher wird diese Beziehung zu der folgenden

$$\frac{\overline{P'I'}}{\overline{P'T}} = \frac{\overline{T^*T}}{\overline{PT}}.$$

Man sieht nun leicht ein, daß dieser zweite Quotient an Größe und Vorzeichen gleich dem Verhältnisse $\frac{d}{p}$ ist, d. i. der Koten von C und P.

Es besteht daher auch nach dem Vorzeichen die Gleichheit

$$\frac{\overline{P'T}}{\overline{P'I'}} = \frac{p}{d}. \tag{1}$$

Um demnach die Aufgabe zu lösen, **Auf der Geraden $g \equiv (TI')$ den Punkt mit der Kote p zu finden**, braucht man nur die Strecke $\overline{TI'}$ nach dem Verhältnisse $\frac{d}{p}$ zu teilen, der Teilpunkt ist die Projektion des gesuchten Punktes.

Zur Übung: Man bestimme den geometrischen Ort der Punkte gleicher Kote, die auf einer gegebenen Ebene liegen.

Anwendung: Mit Hilfe der Gleichung (1) kann man ein Kennzeichen aufstellen, ob zwei Geraden, von denen wenigstens eine parallel zur Bildebene ist, sich schneiden oder nicht.

a) Die beiden Geraden seien $r \equiv (TI')$ und $s \equiv (s'; UJ', P')$. Wenn sie sich schneiden, so hat der Schnittpunkt X als Projektion den Punkt $r's'$; nun hat der Punkt $X \equiv (TI', X')$ als Kote $d\frac{X'T}{X'I'}$; da er aber auf der zur Bildebene parallelen Geraden s liegt, so ist seine Kote auch gleich der des Punktes P, nämlich $d\frac{P'U}{P'J'}$; also lautet die Inzidenzbedingung:

$$\frac{\overline{P'U}}{\overline{P'J'}} = \frac{\overline{X'T}}{\overline{X'I'}}.$$

b) Die beiden Geraden seien hingegen $g_1 \equiv (g_1'; T_1I_1', P_1')$ und $g_2 \equiv (g_2'; T_2I_2', P_2')$, und also beide parallel zur Bildebene. Schneiden sie sich im Punkte X, dessen Bild der Punkt $r_1'r_2'$, so hat dieser dieselbe Kote, mag man ihn als Punkt von r_1 oder r_2 auffassen. Nun haben aber alle Punkte von r_1 die Kote von P_1, nämlich $d\frac{P_1'T_1}{P_1'I_1'}$, und alle von r_2 die Kote $d\frac{P_2'T_2}{P_2'I_2'}$. Daraus folgt die Inzidenzbedingung:

$$\frac{\overline{P_1'T_1}}{\overline{P_1'I_1'}} = \frac{\overline{P_2'T_2}}{\overline{P_2'I_2'}}.$$

Der Leser wird nicht verfehlen, die Ähnlichkeit zwischen dieser Beziehung und der in Nr. 57, zweite Fußnote, für die Inzidenz zweier nicht zur π parallelen Geraden aufgestellten aufzusuchen.

59. Aus der Beziehung (1) kann man leicht weitere nützliche Folgerungen ziehen. Zuvor sei bemerkt, daß die beiden Ebenen π und π^* den ganzen Raum in drei Gebiete teilen: das **erste** zwischen π und π^* gelegen, das **zweite** außerhalb von π^* und das **dritte** jenseits der π. Die Punkte des ersten Gebietes sind dadurch gekennzeichnet, daß $0 < p < d$, die des zweiten durch $p > d$ und die des dritten durch $p < 0$; die speziellen Werte $p = 0$, $p = d$, $p = -d$ kommen den Punkten der Ebenen π, π^*, π^{**} zu. Verknüpfen wir diese Bemerkungen mit der Beziehung (1), so können wir folgern, daß für die Punkte des

ersten Gebietes $0 < \frac{P'T}{P'I'} < 1$, daher liegt P' außerhalb $\overline{TI'}$ auf der Seite von T

zweiten „ $\frac{P'T}{PI'} > 1$, „ „ „ „ „ „ „ „ „ I'

dritten „ $\frac{P'T}{PI'} < 0$, „ „ „ innerhalb „ .

Insbesondere ist der Mittelpunkt von $\overline{PI'}$ das Bild desjenigen Punktes der Geraden (TI'), in welchem diese die Gegenebene schneidet. Mit Hilfe dieser Bemerkungen sind wir imstande, aufzufinden, in welchem Gebiete des Raumes sich ein Punkt befindet, der durch seine



Projektion und eine ihn enthaltende Gerade bestimmt ist. Für einen Punkt, der durch seine Projektion und eine ihn enthaltende Ebene bestimmt ist, läßt sich die analoge Frage durch folgenden Satz beantworten, der sich aus dem dargelegten Material leicht ergibt:

Eine beliebige Ebene $\tau \equiv [ti']$ wird durch die Ebenen π, π^* in drei Gebiete geteilt: das eine liegt zwischen diesen beiden Ebenen, eins liegt diesseits der zweiten Ebene, das dritte jenseits der ersten Ebene; dem ersten entspricht das Gebiet der Bildebene außerhalb des Streifens ti' auf der Seite von t, dem zweiten das analoge auf der Seite von i', dem dritten das Gebiet innerhalb dieses Streifens.

60. Zwei beliebige Punkte P und Q einer Geraden bestimmen auf ihr ein endliches Stück, welches die Strecke PQ genannt wird; der übrige Teil kann als im Unendlichen geschlossen angesehen werden und soll als die Pseudostrecke PQ bezeichnet werden. Projizieren wir nun eine beliebige Strecke PQ von C aus auf π, so erhält man im allgemeinen wieder eine Strecke, in gewissen Fällen jedoch eine Pseudostrecke und dies letztere findet immer und nur dann statt, wenn die Strecke PQ die Verschwindungsebene schneidet, mit anderen Worten, wenn der eine der Punkte P oder Q innerhalb des zweiten Raumgebietes sich befindet, der andere im ersten oder dritten. In diesen Fällen muß man als Projektion der Strecke PQ immer die Pseudostrecke $P'Q'$ ansehen, also das unendliche Stück, welches übrig bleibt, wenn man von der Geraden g' das endliche Stück $P'Q'$ fortnimmt. Um zu erkennen, ob dieser

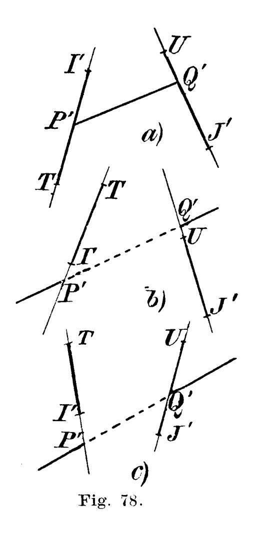


Fig. 78.

Fall vorliegt oder nicht, genügt es, auf die in der vorigen Nummer gemachten Bemerkungen zurückzugreifen, vgl. auch die Figuren 78a), b), c); vorausgesetzt ist dabei, daß die Endpunkte P und Q in der gewöhnlichen Weise dargestellt sind, also $P \equiv (TI', P')$, $Q \equiv (UJ', Q')$.

Aus diesen Bemerkungen ergeben sich auch noch weitere, nicht weniger wichtige, die sich auf die Darstellung einfacher Vielecke beziehen. Betrachten wir nämlich z. B. ein einfaches Viereck $ABCD$, das in der Ebene $[ti']$ so gelegen ist, daß nur die zwei Ecken A

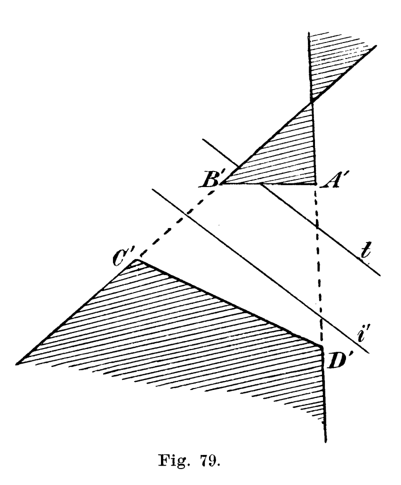


Fig. 79.

und B in das zweite Gebiet des Raumes fallen, dann projizieren sich die Seiten AB und CD in die Strecken $A'B'$ und $C'D'$, während die beiden anderen als Projektionen die Pseudostrecken $B'C'$ und $A'D'$ haben (vgl. Fig. 78). Demnach hat das endliche Polygon $ABCD$ als Projektion das unendliche Stück der Bildebene, das in der Figur schraffiert ist, und das man ein **Pseudopolygon** nennen könnte.

61. Wir gehen jetzt zu den metrischen Elementen über, die mit einer beliebigen Geraden des Raumes verknüpft werden; man pflegt bei einer solchen zu betrachten

1. Die „Länge" l, darunter versteht man die Länge des Stückes derselben, das zwischen den beiden Ebenen π und π^* liegt, also die Strecke TT^*.

2. Die „Neigung" α, darunter versteht man den spitzen Winkel, den sie mit der Bildebene bildet, also den Winkel CIC_0.

Aus diesen Definitionen ergibt sich sogleich der Satz: **Einander parallele Geraden haben dieselbe Länge und dieselbe Neigung.** Zwischen l, α und der Distanz d bestehen folgende Beziehungen, die sich aus einer einfachen Betrachtung (der Fig. 75) ergeben.

$$l = \overline{TT^*} = \overline{CI'} = \sqrt{\overline{CC_0}^2 + \overline{C_0I'}^2} = \sqrt{d^2 + \overline{C_0I'}^2};$$
$$\frac{d}{\sin\alpha} = \frac{\overline{C_0I'}}{\cos\alpha} = l; \quad \sin\alpha = \frac{d}{l}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{d}{C_0I'}.$$

Daraus folgt dann: **Alle Geraden von gleicher Länge haben dieselbe Größe der Neigung und umgekehrt; die Fluchtpunkte solcher Geraden liegen auf einem Kreise, der den Hauptpunkt als Zentrum und die Länge $d \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ als Radius hat.**

Dieser Kreis heißt „der Kreis von der Neigung α"; für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ hat er den Radius 0, für $\alpha = 0$ den Radius ∞, während er für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ mit dem Distanzkreise zusammenfällt.

Bei einer Ebene betrachtet man in analoger Weise:

1. Die „Breite" l, darunter versteht man den Abstand der Geraden t und t^*, in welchen sie die Ebenen π und π^* schneidet, oder auch den Abstand des Projektionszentrums C von der Fluchtgeraden i'.

2. Die „Neigung" β, darunter versteht man den spitzen Winkel, den sie mit der Bildebene bildet. — Es ist klar: **Parallele Ebenen haben dieselbe Breite und dieselbe Neigung.**

Fällt man noch das Lot CH auf i', so ist auch C_0H senkrecht zu i' und das rechtwinklige Dreieck CC_0H ergibt:

$$l = \sqrt{\overline{CC_0}^2 + \overline{C_0H}^2} = \sqrt{d^2 + \overline{C_0H}^2};$$
$$\frac{d}{\sin\beta} = \frac{C_0H}{\cos\beta} = l, \quad \sin\beta = \frac{d}{l}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{d}{C_0H}.$$

Daraus folgt: **Alle Ebenen gleicher Breite haben dieselbe Neigung β und umgekehrt; ihre Fluchtgeraden berühren einen Kreis, dessen Zentrum der Hauptpunkt, dessen Radius $d \cdot \text{cotg}\, \beta$ ist.**

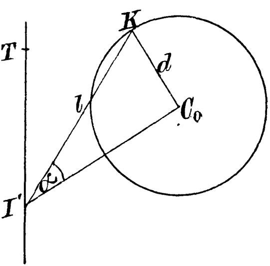


Fig. 80.

62. Aufgabe I. Die Länge und Neigung einer Geraden $g \equiv (TI')$ durch Zeichnung zu bestimmen. Auflösung: Man verbinde den Hauptpunkt C_0 (Fig. 80) mit I' und ziehe den zu C_0I' senkrechten Radius C_0K des Distanzkreises. Verbindet man dann K mit I', so erhält man das rechtwinklige Dreieck, in welchem $\sphericalangle\, C_0I'K = \alpha$ und $\overline{KI'} = l$ ist.

Aufgabe II. Die Breite l und Neigung α einer Ebene $\tau \equiv [ti']$ durch Zeichnung zu bestimmen. Auflösung: Man fälle (Fig. 81) das Lot C_0H auf i', ziehe den zu i' parallelen Radius C_0K, verbinde K mit H, dann ist in dem entstandenen rechtwinkligen Dreiecke $\sphericalangle\, C_0HK = \beta$ und $HK = l$.

Anmerkung: Zu beachten ist, daß man bei diesen beiden Lösungen die Spuren nicht benutzt; der Grund davon ist leicht einzusehen.

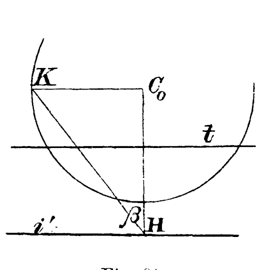


Fig. 81.

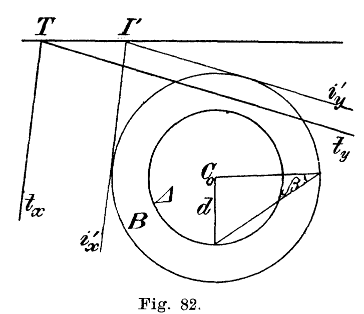


Fig. 82.

Aufgabe III. Durch eine zur Bildebene nicht parallele[1]) Gerade $g \equiv (TI')$ eine Ebene von gegebener Neigung β zu legen. Auflösung: Die Fluchtgeraden aller Ebenen von der Neigung β berühren einen Kreis um C_0 mit dem Radius $d \cdot \text{ctg}\, \beta$. Wir zeichnen diesen Kreis B. Andererseits muß die Fluchtgerade der gesuchten Ebene durch den Fluchtpunkt der gegebenen Geraden gehen; sie wird daher eine der Geraden i_x', i_y' sein, die von I' an B als Tangenten gezogen sind. Die durch T zu diesen gezogenen Parallelen t_x und t_y sind die Spuren der gesuchten Ebenen. Damit die Aufgabe möglich sei, muß C_0I' größer als der Radius des Kreises B sein, oder $\frac{d}{\text{tg}\,\alpha} > \frac{d}{\text{tg}\,\beta}$, oder

1) Bezüglich des entgegengesetzten Falles sehe man Nr. 65 Anwendung.

$\beta > \alpha$; mit anderen Worten, die Neigung der zu suchenden Ebene muß größer sein als die der gegebenen Geraden.

Aufgabe IV: In einem Strahlenbüschel die Strahlen von gegebener Neigung α aufzufinden. Auflösung: Das Büschel sei durch seine Ebene $\tau \equiv [ti']$ und die Projektion O' seines Zentrums gegeben. Die Fluchtpunkte aller Geraden des Raumes mit der Neigung α liegen auf einem Kreise A um C_0 mit dem Radius $d \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ (Fig. 83), auf A liegen daher auch die Fluchtpunkte der gesuchten Strahlen. Außerdem aber müssen diese auf i' liegen; sie sind also die Punkte I_x', I_y' in denen i' den Kreis A schneidet. Die Projektionen der gesuchten Strahlen sind also die Geraden $O'I_x'$ und $O'I_y'$ und ihre Spurpunkte sind die Schnitte T_x, T_y mit t, der Spurlinie der gegebenen Ebene. — Damit die Lösung möglich sei, muß α kleiner sein als die Neigung der Ebene τ.

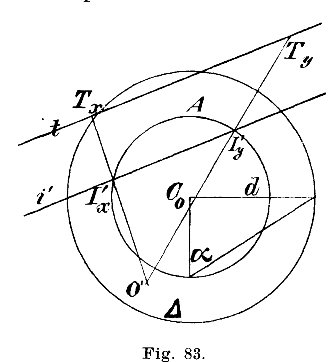


Fig. 83.

63. Die Betrachtung der Neigungen von Ebenen und Geraden führt zu einer Bestimmung des Distanzkreises durch andere günstige und ausreichend gegebene Stücke, wie folgende Beispiele zeigen.[1])

Porisma I. Drei beliebige Strecken der Bildebene T_1I_1', T_2I_2', T_3I_3' können immer, vorausgesetzt, daß die drei Punkte I_1', I_2', I_3', nicht in gerader Linie liegen, als Darstellungselemente dreier Geraden von derselben Neigung α in bezug auf ein passend gewähltes Projektionszentrum angesehen werden.

Beweis: Der Kreis der durch die drei Punkte $I_1'I_2'I_3'$ geht, muß der Kreis der Neigung α werden, daher sein Mittelpunkt der Hauptpunkt C_0; ist sein Radius r, so muß $d = r \cdot \operatorname{tg} \alpha$ werden, wodurch der Distanzkreis und somit das Projektionszentrum (auf zwei Weisen nach Nr. 51) bestimmt ist.

Porisma II. Drei Parallelenpaare t_1i_1', t_2i_2', t_3i_3', können als Darstellungselemente dreier Ebenen mit den zugewiesenen Neigungen β_1, β_2, β_3 in bezug auf ein passend gewähltes Projektionszentrum angesehen werden.

Beweis: Bezeichnen wir allgemein mit Pr den Abstand des Punktes P von der Geraden r, so haben wir hier

$$\overline{C_0 i_k'} = d \cdot \operatorname{ctg} \beta_k, \qquad (k = 1, 2, 3)$$

daher ist

1) Wir begegnen hier einer Kategorie von Fragen, die kein Gegenstück in der Mongeschen Methode haben.

$$\frac{\overline{C_0 i_1'}}{\operatorname{ctg} \beta_1} = \frac{\overline{C_0 i_2'}}{\operatorname{ctg} \beta_2} = \frac{\overline{C_0 i_3'}}{\operatorname{ctg} \beta_3}.$$

Durch diese Beziehungen ist der unbekannte Hauptpunkt C_0 (auf 4 Weisen) bestimmt. d folgt nun daraus, daß $d = \overline{C_0 i_k} \cdot \operatorname{tg} \beta_k$, und daraus (auf zwei Weisen) das Zentrum C. Die Aufgabe hat daher im allgemeinen acht Lösungen.

Zur Übung: I. Den Fall zu untersuchen, daß $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$. — **II.** Nach Art von II das Porisma I zu verallgemeinern und den sich ergebenden Satz zu beweisen.

Drittes Kapitel.

Probleme der Geometrie der Lage.

64. Die bisher gegebenen Grundlagen setzen uns in den Stand, mit Hilfe der Zentralprojektion jedes beliebige Problem der reinen Geometrie der Lage zu lösen. Mit Beziehung auf die Darlegungen in Nr. 21 werden wir auch hier vor allem jene Fragen behandeln, die wir damals als Fundamentalaufgaben der Geometrie der Lage bezeichneten; indem wir sie jedoch aus Zweckmäßigkeitsgründen in einer anderen Reihenfolge als bei der Behandlung durch die Mongesche Methode, vornehmen.

I. Die Schnittlinie zweier Ebenen zu finden.

Auflösung: Sind $\tau_1 \equiv [t_1 i_1']$ und $\tau_2 \equiv [t_2 i_2']$ die gegebenen Ebenen, so werden die Darstellungselemente der gesuchten Geraden sein bzw. die Punkte $T_x \equiv t_1 t_2$ und $I_x' \equiv i_1' i_2'$.

Zur Übung: Welches ist die Bedingung dafür, daß $(t_1 i_1', P')$ und $(t_2 i_2', P')$ (nach Nr. 56) Darstellungen desselben Punktes des Raumes seien?

Anwendung: Zwei Geraden $(T_1 I_1')$ und $(T_2 I_2')$ mögen dieselbe gemeinsame Projektion haben; dann liegen sie in derselben projizierenden Ebene, folglich schneiden sie sich in einem Punkte X. Um dessen Projektion zu finden (Fig. 84), lassen wir durch jede der gegebenen Geraden eine Hilfsebene gehen; diese beiden Ebenen schneiden sich in einer Geraden TI', die offenbar auch durch X geht, folglich wird ihre Projektion, die Gerade, die die vier Punkte T_1, T_2, I_1', I_2' enthält, in der Projektion des gesuchten Punktes X schneiden.

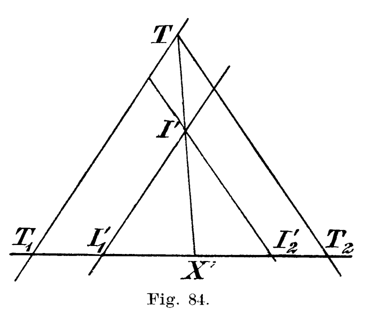


Fig. 84.

Zur Übung: I. Mit Hilfe der Gleichung (1) in Nr. 58 nachzuweisen, daß der Punkt X (in Fig. 84) dieselbe Kote hat, mag man ihn als zu der Geraden

$(T_1 I_1')$ oder $(T_2 I_2')$ gehörig betrachten. — **II.** Die in der obigen „Anwendung" behandelte Aufgabe zu lösen unter der Voraussetzung, daß eine der beiden Geraden parallel zur Bildebene sei.

Die oben angegebene Art, den Schnitt zweier Ebenen zu finden, wird offenbar illusorisch, wenn die vier Geraden t_1, t_2, i_1', i_2' einander parallel sind. In diesem Falle (vgl. Nr. 57, IV) wird die Gerade $x \equiv \tau_1 \tau_2$ parallel zur Bildebene, und um sie darzustellen, muß man einen ihrer Punkte bezeichnen und ihre Projektion suchen. Zu diesem Zwecke benutzen wir eine (beliebige) Hilfsebene $\tau \equiv [ti']$ (Fig. 85); sie schneidet die beiden Ebenen längs zweier Geraden $T_1 I_1'$, $T_2 I_2'$, die wir nach obigem bestimmen können; der allen drei Ebenen gemeinsame Punkt gehört der gesuchten Geraden an. Sein Bild P' ist der Schnitt von $T_1 I_1'$ und $T_2 I_2'$. Die durch P' zu den vier Geraden gezogene Parallele ist also x'. Demzufolge ist auch $x \equiv (x'; T_1 I_1', P')$ bzw. $x \equiv (x'; T_2 I_2', P')$ (vgl. die Anmerkung am Schlusse von Nr. 54). — Das Verfahren wird wiederum unausführbar, wenn die Streifen $t_1 i_1'$ und $t_2 i_2'$ durch bloße Verschiebung zur Deckung gebracht werden können, da in diesem Falle, wie man die Hilfsebene auch wählen mag, die Geraden $T_1 I_1'$ und $T_2 I_2'$ einander parallel werden. In diesem vorliegenden Falle schneiden sich aber die beiden Ebenen in einer Geraden der Verschwindungsebene (s. Nr. 57, VI), die dann durch die in Nr. 56 angegebene Methode nach Belieben durch $(t_1 i_1')$ oder $(t_2 i_2')$ dargestellt werden kann.

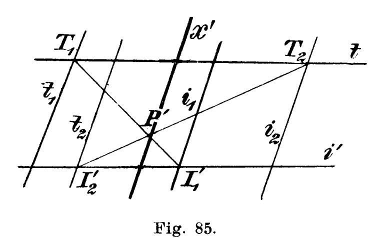


Fig. 85.

Die allgemeine Methode der Aufsuchung des Schnittes zweier Ebenen erfordert keine wesentlichen Änderungen, wenn eine (oder auch beide) der gegebenen Ebenen durch das Projektionszentrum geht, sie ist dagegen nicht anwendbar, wenn eine der Ebenen parallel zur Bildebene läuft. Um diesen Fall direkt zu behandeln, mögen $\sigma \equiv [TI', M']$ und $\tau \equiv [ti']$ die gegebenen Ebenen sein (Fig. 86). Es sei $(TI') \equiv a$. Da die gesuchte Gerade x in der Ebene τ liegt und parallel zur Bildebene ist, so wird ihre Projektion x' parallel zur Spur t der Ebene τ sein, daher genügt ein Punkt zur Bestimmung von x. Zu dem Zwecke legen wir durch a eine Hilfsebene $\tau_1 \equiv [t_1 i_1']$; sie wird die beiden Ebenen σ, τ längs zweier Geraden b, c schneiden, die sich in einem Punkte X von x treffen. Nun kann man aber die Gerade $c \equiv (T_1 I_1')$ durch Anwendung des allgemeinen Verfahrens auffinden.

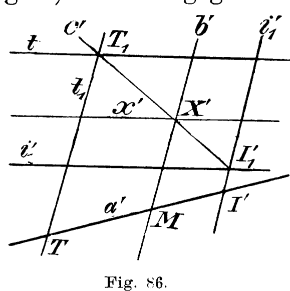


Fig. 86.

Die Gerade b dagegen, parallel zur Bildebene, liegt in der Ebene τ_1 und geht durch den Punkt M; somit ist b' nichts anderes als die durch M' zu t_1 gezogene Parallele, und man kann schreiben: $b \equiv (b'; TI', M')$. Ist nun X' der Punkt $b'c'$, so wird $X \equiv (T_1 I_1', X')$, und wenn man dann durch X' die Gerade x' parallel zu t zieht, so ist $x \equiv (x'; T_1 I_1', X')$.

Zur Übung: Wie werden die Schnitte einer Ebene $\tau \equiv [ti']$ mit der Verschwindungs- und der Gegenebene dargestellt?

65. II. Durch einen Punkt und eine gegebene Gerade eine Ebene zu legen. — Auflösung: Es sei $P \equiv (TI', P')$ der gegebene Punkt. Wenn die Gerade nicht parallel zur Bildebene ist, können wir sie darstellen als $g \equiv (UJ')$. Nun wird die gesuchte Ebene Pg nicht verschieden sein von derjenigen, die durch g und die zu g durch P gezogene Parallele p geht. Es sei nun $p \equiv (VJ')$ diese Gerade (s. Nr. 57, II). Dann wird die Gerade UV die Spurlinie t_x der gesuchten Ebene sein, während ihre Fluchtgerade i_x' die durch J' zu t_x gezogene Parallele ist (Fig. 87). — Man kann diese Lösung auch anwenden, wenn P' in der Verschwindungsebene liegt (P' ist dann der unendlich ferne Punkt von TI'); sie ist jedoch nicht anwendbar, wenn g parallel zur Bildebene ist. Wir stellen sie in diesem Falle als $g \equiv (g'; UJ', A')$ dar, und beachten, daß die gesuchte Ebene auch die Gerade AP enthält, deren Spurpunkt T_1 und Fluchtpunkt I_1' zu finden wir bald lernen werden (s. Nr. 67). Da andererseits jene Ebene durch eine zur Bildebene parallele Gerade geht, so sind ihre Darstellungselemente parallel zu g' (vgl. Nr. 54, Schlußbemerkung). Somit sind t_x und i_x nichts weiter als die durch T_1 und I_1' zu g' gezogenen Parallelen (s. auch Nr. 68).

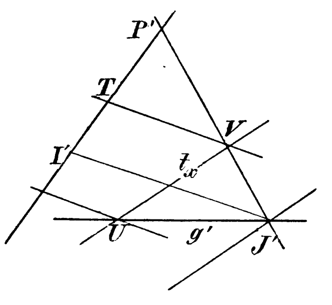


Fig. 87.

Die behandelte Aufgabe liefert (außer dem in Nr. 57, 2 schon betrachteten) Falle noch zwei bemerkenswerte Spezialfälle, die entstehen, wenn eins der gegebenen Stücke ins Unendliche verlegt wird; betrachten wir diese besonders.

α) **Durch eine Gerade g die zu einer anderen Geraden s parallele Ebene zu legen.** Wenn weder g noch s zur π parallel sind, können wir sie darstellen als $g \equiv (TI')$, $s \equiv (UJ')$. Da die Fluchtgerade i_x' der gesuchten Ebene sowohl durch I' als J' gehen muß, so ist sie die Verbindungslinie dieser beiden Punkte, ihre Spurlinie dagegen wird die durch T zu i_x' gezogene Parallele t_x sein. — Ist jedoch g parallel zur Bildebene, so möge $g \equiv (g'; TI', P')$ sein. Durch $P \equiv (TI', P')$

ziehen wir dann die Gerade $p \equiv (T_1 J')$ parallel zu s (s. Nr. 57, II); p und g bestimmen nun die gesuchte Ebene, deren Darstellungselemente die durch T_1 und J' zu g' gezogenen Parallelen sind. Wenn in noch speziellerem Falle g selbst in der Verschwindungsebene läge, also $g \equiv (T_1 I_1', M'_{1\infty}; T_2 I_2', M'_{2\infty})$, so würde die gesuchte Ebene jene sein, die durch die beiden Geraden geht, die man durch M_1 und M_2 parallel zu s gezogen hat (s. Nr. 57, II). — Wenn hingegen s parallel zur Bildebene, g aber $\equiv (TI')$ wäre, so könnte man die Aufgabe lösen, indem man durch T und I' die Parallelen zu s' zöge; diese wären dann Spur- und Fluchtgerade der gesuchten Ebene. Wie man zu verfahren hätte, wenn s in π^* liegt, möge der Leser selber ausfindig machen.

β) Durch einen Punkt $P \equiv (TI', P')$ die zu einer gegebenen $\tau \equiv (ti')$ parallele Ebene zu legen. (Fig. 88). Die Fluchtgerade i_x' der gesuchten Ebene ξ fällt offenbar mit der gegebenen i' zusammen. Um deren Spur t_x zu finden, denken wir uns durch den Punkt eine beliebige Gerade a in ξ gezogen; ihre Projektion a' können wir somit beliebig annehmen, ihr Fluchtpunkt wird dann sein $I_x' \equiv a' i_x'$. Da nun die beiden Geraden a und $T\ I'$ durch denselben Punkt P gehen, so liegen sie in einer Ebene. Nennen wir nun den Spurpunkt von $a\ T_x$, so werden die Geraden $I' I_x$ und TT_x einander parallel sein, was uns die Auffindung von T_x ermöglicht. t_x ist dann nichts weiter als die durch T_x zu $i' \equiv i_x'$ gezogene Parallele (s. Fig. 88). Zu bemerken ist, daß man die Spurlinie t der Ebene τ in der Konstruktion nicht nötig hat, wie auch vorauszusehen war. Den Nachweis, daß die angegebene Lösung auch anwendbar ist, falls P in der Verschwindungsebene liegt, ebenso wie zu verfahren ist, wenn τ zur Bildebene parallel läuft, überlassen wir dem Leser.

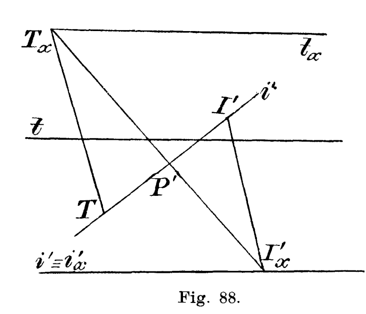


Fig. 88.

Anwendung: „Durch eine zur Bildebene parallele Gerade $g \equiv (g'; TI', P')$ eine Ebene von bestimmter Neigung β zu legen". Ist der Kreis der Neigung β gezeichnet (s. Nr. 62, III) so kann jede der beiden Geraden i_x', i_y' die ihn parallel zu g' laufend berühren als Fluchtgerade der gesuchten Ebene angenommen werden; man kennt also von ihr die Fluchtgerade und einen Punkt $P \equiv (TI_1' P')$, man kann also ihre Spur nach dem obigen Verfahren erhalten.

66. III. Den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene zu finden. Nehmen wir zunächst als gegebene Stücke die Gerade $g \equiv (TI')$ und

die Ebene $\tau \equiv [ti']$. Wir legen durch sie eine Hilfsebene $\tau_1 \equiv [t_1 i_1']$ (Fig. 89); sie schneidet τ in einer Geraden $g_1 \equiv [T_1 I_1']$, die nach Nr. 64 konstruierbar ist. g_1 schneidet g offenbar in dem gesuchten Punkte X. Wenn daher X' der Schnittpunkt der Geraden $I'T$ und $I_1'T_1$ ist, so wird $X \equiv (TI', x')$ der gesuchte Punkt sein.

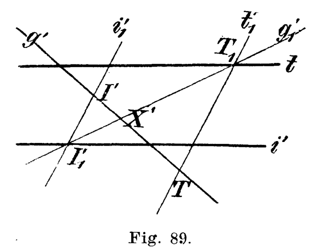


Fig. 89.

Anwendung: Um „die Ebene zu konstruieren, die durch den Punkt $P \equiv (ti', P')$ und die Gerade $g \equiv (TI')$ geht," suche man zunächst den Punkt Q, in welchem g die Ebene $\tau \equiv [ti']$ trifft; dann hat die Gerade PQ als Darstellungselemente die Punkte T_1, I_1', in denen die Gerade $P'Q'$ bzw. t und i' schneidet. Die Geraden TT_1 und $I'I_1'$ sind Spur- und Fluchtgerade der gesuchten Ebene.

Zur Übung: Wie gestaltet sich die Lösung der obigen Aufgabe, wenn g oder τ durch das Projektionszentrum gehen?

Der Grundgedanke der dargelegten Lösung kann auch angewendet werden, wenn eins der gegebenen Stücke zur Bildebene parallel ist, jedoch erfordert die Ausführung Kunstgriffe, die wir jetzt angeben wollen.

α) **Den Schnittpunkt X einer Geraden $g \equiv (TI')$ mit einer zur Bildebene parallelen Ebene $\tau \equiv [UJ', A']$ zu finden** (Fig. 90).

Der Punkt $A \equiv (UJ', A')$ und die Gerade g bestimmen eine Ebene, deren Spur t und Fluchtgerade i' wir nach Nr. 65 bestimmen können; sie schneidet die Ebene τ in einer Geraden g_1, da diese parallel zur Bildebene, so liegt sie in der Ebene τ und geht durch A. Somit ist ihre Projektion nichts anderes, als die durch A' zu t gezogene Parallele. Schneidet diese nun g' in X', so ist $X \equiv (TI', X')$ der gesuchte Punkt.

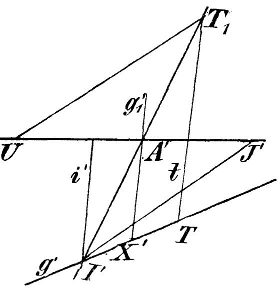


Fig. 90.

β) **Den Schnittpunkt einer zur Bildebene parallelen Geraden $g \equiv (g'; TI', A')$ mit einer Ebene $\tau \equiv [ti']$ zu finden.**

Die Gerade TI' bezeichnen wir mit a; sie bestimmt zugleich mit g eine Ebene, deren Darstellungselemente die durch T und I' zu g' gezogenen Parallelen sind. Die Ebene ag schneidet τ in einer Geraden $s \equiv (T_1 I_1')$, die sogleich bestimmt ist (Fig. 91). Ist nun X' der Schnittpunkt von g' und s', so wird $X \equiv (T_1 I_1', X')$ der gesuchte Punkt sein.

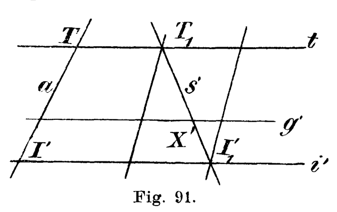


Fig. 91.

Zur Übung: Die Aufgaben α) und β) zu lösen mit Hilfe der Gleichung (1) in Nr. 56, sowie mit Benutzung des Umstandes, daß im ersten Falle alle Punkte von τ, und im zweiten Falle alle von g dieselbe Kote haben.

67. IV. Die Verbindungslinie zweier Punkte zu bestimmen.[1])

α) Es seien $P_1 \equiv (T_1 I', P_1')$ und $P_2 \equiv (T_2 I_2', P_2')$ die gegebenen Punkte (Fig. 92). Das Bild x' der gesuchten Geraden x wird die Verbindungslinie $P_1'P_2'$ sein. Um ihre Darstellungselemente zu konstruieren, nehmen wir eine durch x gehende Hilfsebene; ihre Spur und ihre Fluchtgerade werden x' in den gesuchten Punkten treffen. Als solche Ebene können wir diejenige wählen, die durch den Punkt P_1 und die Gerade $T_2 I_2'$ geht; denn von ihr können wir (nach Nr. 65) die Spur t_x und die Fluchtgerade i_x' bestimmen; dann wird $T_x \equiv t_x x'$ und $I_x' \equiv i_x' x'$ und $x \equiv (T_x I_x')$.

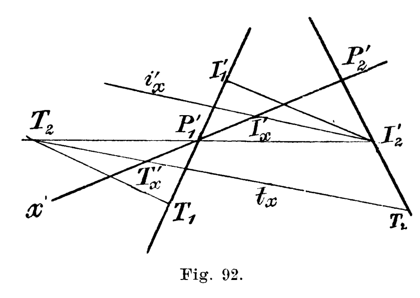


Fig. 92.

Sollte ausnahmsweise x' parallel zu t_x und i_x werden, so würde die fragliche Gerade parallel zur Bildebene sein und sich dann als $x \equiv (x'; T_k I_k', P_k')$ darstellen lassen, wo $k = 1$ oder 2. — Sollte einer der Punkte, etwa P_1 in der Verschwindungsebene liegen, so würde P_1' der unendlich ferne Punkt der Geraden $T_1 I_1'$ sein, und die angegebene Lösung würde ihre Anwendbarkeit beibehalten. Wenn endlich P_1 und P_2 im Unendlichen lägen, so könnte man ihre Verbindungslinie sogleich darstellen als $x \equiv (T_1 I_1', P_{1\infty}; T_2 I_2', P_{2\infty})$, vgl. Nr. 55.

β) Die gegebenen Punkte seien jetzt auf die zweite der Arten, die wir im allgemeinen (Nr. 56) angegeben haben, bestimmt, nämlich als $P_1 \equiv (t_1 i_1', P_1')$, $P_2 \equiv (t_2 i_2', P_2')$ (Fig. 93). Die gesuchte Gerade hat dann als Bild $x' \equiv P_1'P_2'$; um ihre Darstellungselemente T_x und I_x' zu finden, genügt es, eine Ebene durch x zu legen wie im vorigen Falle. Als solche wählen wir zweckmäßig jene, die durch P_1 und P_2 und durch den unendlich fernen Punkt der Geraden TI' geht, die den beiden Ebenen $[t_1 i_1']$ und $[t_2 i_2']$ gemeinsam ist; oder auch die durch die beiden Geraden p_1 und p_2 gehende, die durch P_1 und P_2

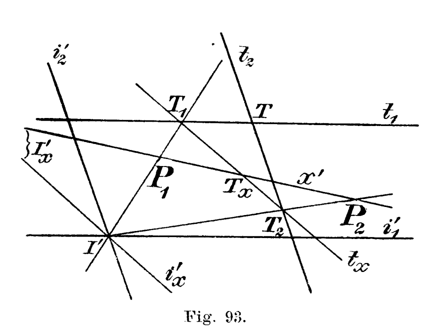


Fig. 93.

1) Der Fall, daß einer der Punkte im Unendlichen, sowie daß einer in der π^* liegt, ist schon behandelt worden in Nr. 57.

zu der Geraden TI' parallel gezogen wird. Nun hat p_1 als Fluchtpunkt I' und da p_1 in der Ebene $[t_1 i_1']$ liegt, so wird seine Spur T_1 auf t_1 zu liegen kommen, T_1 wird also der Schnittpunkt von t_1 und $P_1'I'$ sein. Ebenso ist der Spurpunkt T_2 von p_2 der Schnitt der beiden Geraden t_2 und $P_2'I'$. p_1 und p_2 bestimmen eine Ebene, deren Spurlinie t_x die Gerade $T_1 T_2$ ist, während ihre Fluchtgerade i_x' die durch I' zu t_x gezogene Parallele ist. Sind diese gezogen, so sind $T_x \equiv x' t_x$ und $I_x' \equiv x' i_x'$ die Darstellungselemente der gesuchten Verbindungslinie.

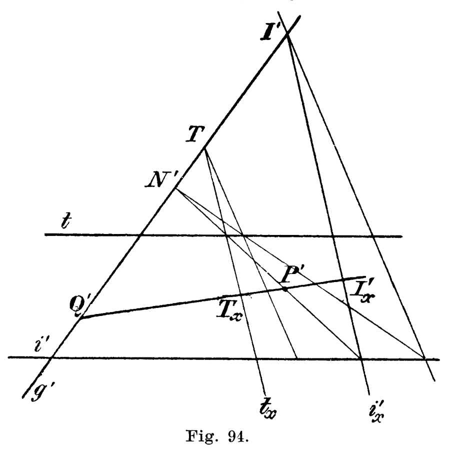


Fig. 94.

γ) Nehmen wir schließlich an, die gegebenen Punkte seien $P \equiv (ti', P')$ und $Q \equiv (TI', Q')$. Durch ein schon angegebenes Verfahren (s. Nr. 66, Anwendung) können wir die Spurlinie t_x und die Fluchtgerade i_x' der Ebene τ konstruieren, die durch den Punkt P und die Gerade $g \equiv (TI')$ geht, mit Benutzung des Punktes N, in welchem die Ebene $[ti']$ die Gerade g schneidet. Die Geraden t_x, i_x' schneiden die Gerade $P'Q'$ in den gesuchten Darstellungselementen T_x, I_x' von PQ (Fig. 94).

68. In den vorigen Nummern 64—67 haben wir die vier Fundamentalaufgaben der Geometrie der Lage im allgemeinen und in ihren wichtigsten speziellen Fällen gelöst. Die angewendeten Prinzipien ermöglichen uns aber, alle nur denkbaren Fälle zu lösen. Als Stütze für diese Behauptung möge dienen die Lösung folgender

Aufgabe: Die Ebene zu bestimmen, die den Punkt $P \equiv (ti', P')$ mit der zur Bildebene parallelen Geraden $r \equiv (uj', r')$ verbindet (Fig. 95).

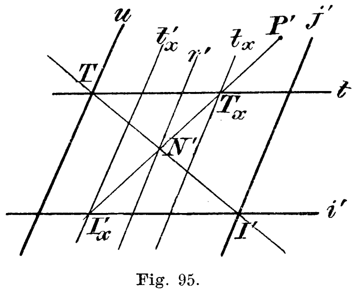


Fig. 95.

Auflösung: Weil die gesuchte Ebene die zur Bildebene parallele Gerade r enthält, so müssen ihre Spur t_x und ihre Fluchtgerade i_x' parallel zu r' werden. Um die Bestimmung zu vervollständigen, genügt es also, einen Punkt von jeder Geraden festzulegen. Zu diesem Zwecke konstruieren wir zuerst den Schnittpunkt N der Geraden r mit der Ebene $[ti']$; es ist der Punkt, in welchem r von der den beiden Ebenen $[ti']$ und $[uj']$ gemeinsamen Geraden TI' getroffen

wird. Die Gerade NP gehört der gesuchten Ebene an; nun hat sie als Darstellungselemente die Punkte T_x und I_x', in denen $N'P'$ die Geraden t und i' trifft. Folglich sind die durch T_x und I_x' zu r' gezogenen Parallelen die Darstellungselemente der Ebene Pg.

Noch einfacher wird die Konstruktion dieser Ebene, wenn r in der Verschwindungsebene liegt. Wenn nämlich $r \equiv (uj')$, so suche man zuerst (Fig. 96) die Schnittlinie TI' der beiden Ebenen $[ti']$ und $[uj']$ und ziehe durch P' die Parallele zu TI'; sind U und J' die Punkte, in denen sie t und i' schneidet, so hat man nur noch durch diese Punkte zu u die Parallelen t_x und i_x' zu ziehen. Diese beiden Geraden begrenzen offenbar einen Streifen, der durch einfache Verschiebung mit dem Streifen uj' zur Deckung gebracht werden kann; folglich schneiden sich die Ebenen $[uj']$ und $[t_x i_x']$ auf der Verschwindungsebene; außerdem geht die letztere auch durch P, ist somit die gesuchte Ebene.

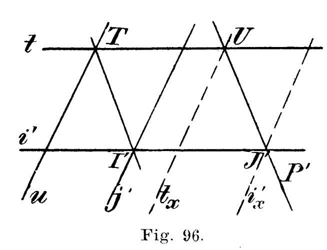


Fig. 96.

69. Daß durch geeignete Kombinationen der Lösungen der Fundamentalaufgaben der Geometrie der Lage sich weitere Probleme derselben Art lösen lassen, mögen noch folgende Beispiele zeigen.

I. Den Schnittpunkt dreier Ebenen zu bestimmen.

Auflösung: Die Ebenen seien gegeben als $\tau_k \equiv [t_k, i_k']$, $(k = 1, 2, 3)$. Wir suchen (nach Nr. 64) die drei Geraden $g_k \equiv (T_k I_k')$, in denen die Ebenen sich zu je zweien schneiden. Ihre Projektionen laufen in einen Punkt X' zusammen, der Projektion des gesuchten Punktes $X \equiv (T_k I_k', X')$, wo k irgend eine der Zahlen 1, 2, 3 sein mag. Man beachte, daß zwei der Geraden $(T_k I_k')$ zur Auffindung von X' genügen, die dritte liefert eine nützliche Kontrolle.

II. Die Ebene darzustellen, die durch drei Punkte M_1, M_2, M_3 bestimmt ist.

Ein erstes Verfahren zur Lösung dieser Aufgabe wäre folgendes: Man konstruiere die Gerade g, die zwei jener Punkte, etwa M_2 und M_3 verbindet (I. Fundamentalaufg.) und bestimme alsdann die Ebene $M_1 g$ (III. Fundamentalaufg.); diese ist dann die gesuchte Ebene. Offenbar kann diese Lösung in drei verschiedenen Weisen ausgeführt werden.

Ein instruktiveres und in bezug auf die gegebenen Stücke symmetrisches Verfahren kann man einschlagen, wenn man annimmt, daß die drei Punkte jeder durch seine Projektion und eine ihn enthaltende Ebene gegeben seien, also als $M_k \equiv (t_k i_k', M_k)$, $(k = 1, 2, 3)$ und es

seien t_x und i_x' die Darstellungselemente der gesuchten Ebene[1]) (Fig. 97) Wir bestimmen die Geraden $r_k \equiv (T_k I_k')$, in denen sich zu je zweien die Ebenen $[t_k i_k']$ schneiden; ihre Projektionen laufen in einen Punkt

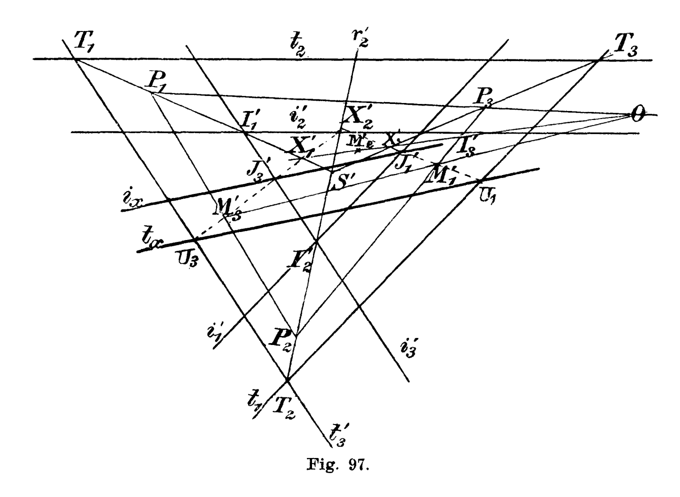


Fig. 97.

S' zusammen, der die Projektion des den drei Ebenen gemeinsamen Punktes S ist. Es seien nun X_k die Schnittpunkte der gesuchten Ebene τ mit den Geraden r_k.

Betrachten wir nun die Punkte M_1, X_2, X_3, so gehören sie der Schnittlinie der Ebene $\tau \equiv (M_1 M_2 M_3)$ mit der Ebene $[t_1 i_1']$ an; sie liegen also in gerader Linie und dasselbe gilt folglich auch für ihre Projektionen M_1', X_2', X_3'. Aus ähnlichen Gründen liegen auch M_2', X_3', X_1' und M_3', X_1', X_2' in einer Geraden. Daraus folgt, daß das (unbekannte) Dreieck $X_1'X_2'X_3'$ dem Dreiecke $M_1'M_2'M_3'$ umbeschrieben ist und daß es seine Ecken auf den durch einen Punkt S' laufenden Geraden $r_1'r_2'r_3'$ hat. Nun ist es bekannt, daß, wenn ein Dreieck $P_1 P_2 P_3$ sich in der Weise deformiert, daß seine drei Ecken drei in einem Punkte S' zusammenlaufende Geraden durchlaufen und zwei seiner Seiten $P_1 P_2$, $P_2 P_3$ um zwei feste Punkte M_3 und M_1 rotieren, alsdann die dritte Seite $P_1 P_3$ um einen dritten festen Punkt O der Geraden $M_3'M_1'$ rotiert; um diesen zu finden, genügt es, eine beliebige Lage des genannten Dreiecks zu betrachten. Es folgt daraus, daß die Verbindungslinie von O mit M_2' die Geraden r_1' und r_3' in den unbekannten Punkten X_1' und X_3' schneiden wird, während X_2' der Konkurrenzpunkt der drei Geraden $X_1'M_3'$, $X_3'M_1'$, r_2' sein wird. Die Gerade $X_2'X_3'$ schneidet t_1 und i_1' in den Punkten U_1 und J_1', die die Spur

1) Vgl. die Abhandlung des Verf. *Sur quelques problèmes élémentaires de la géométrie déscriptive à 3 et 4 dimensions* (Archiv der Math. u. Phys.; 3e Reihe, II. Bd. 1902, p. 257 ff.)

und der Fluchtpunkt der Geraden $X_2 X_3$ sind. Ebenso findet man die Punkte U_2, J_2' und U_3, J_3'; alsdann liegen U_1, U_2, U_3 auf t_x und J_1', J_2', J_3' auf i_x'. Diese beiden Geraden werden parallel zueinander sein und sind die Darstellungselemente der gesuchten Ebene. Der Leser beachte die vielfältigen Verifikationen, die so die angegebene Lösung darbietet.

Zur Übung: I. Durch zwei gegebene Punkte die zu einer gegebenen Geraden parallele Ebene zu legen. **II.** Durch einen Punkt die zu zwei gegebenen Geraden parallele Ebene zu legen. **III.** Die beiden folgenden zueinander dualen Aufgaben zu lösen (vgl. Nr. 24).

Durch einen gegebenen Punkt die Gerade zu legen, die zwei andere windschiefe Geraden trifft.	In einer Ebene die Gerade zu zeichnen, die zwei gegebene windschiefe Geraden trifft.

IV. Die Regelschar darzustellen, die durch drei ihrer zueinander windschiefen Leitgeraden bestimmt ist, sowie den Fall zu untersuchen, daß eine von ihnen im Unendlichen liegt.

III. Die Gerade zu zeichnen, die vier gegebene zueinander windschiefe Geraden schneidet.[1])

Es seien $a \equiv (T_a I_a'), \ldots, d \equiv (T_d I_d')$ die vier Geraden. a, b, c und a, b, d bestimmen zwei Regelscharen **R** und **S**, deren Spuren auf der Bildebene zwei Kegelschnitte Γ und Δ liefern, von denen Γ durch T_a, T_b, T_c, Δ durch T_a, T_b, T_d geht. Um Γ zu bestimmen, betrachten wir die zu a parallele und b und c schneidende Gerade $\bar{a}$, ferner die zu b parallele und a und c schneidende Gerade $\bar{b}$, und die zu c parallele, aber a und b schneidende Gerade $\bar{c}$; zwei von den Spuren $T_{\bar{a}}$, $T_{\bar{b}}$, $T_{\bar{c}}$ genügen, die Bestimmung des Kegelschnittes Γ zu vervollständigen. In ähnlicher Weise läßt sich die von Δ vervollständigen. Da nun Γ und Δ schon zwei Punkte gemeinsam haben, so haben sie noch zwei weitere, T_x, T_y gemeinsam, die man mit Zirkel und Lineal konstruieren kann. Diese Punkte sind die Spuren der gesuchten Geraden; ihre Fluchtpunkte sind dann leicht aufzufinden.

Viertes Kapitel.

Senkrechte Geraden und Ebenen.

a) Geraden und Ebenen, die zur Bildebene senkrecht sind.

70. Alle Aufgaben, die sich auf zur Bildebene senkrechte Geraden oder Ebenen beziehen, können mit Hilfe folgender einfacher und leicht ersichtlicher Sätze gelöst werden:

1) G. Tognoli, Period. di matem., 3. Serie, Vol. II, 1904—05; S. 230.

I. Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Senkrechtstehen einer Geraden auf der Bildebene ist, daß ihr Fluchtpunkt mit dem Hauptpunkte zusammenfällt.

II. Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Senkrechtstehen einer Ebene auf der Bildebene ist, daß ihre Fluchtgerade durch den Hauptpunkt geht.

Sehen wir nun, wie diese Sätze anwendbar sind:

Aufgabe I. Von einem gegebenen Punkte auf die Bildebene das Lot zu fällen und den Fußpunkt zu bestimmen.

Auflösung: Es sei $P \equiv (TI', P')$ der gegebene Punkt. Das gesuchte Lot hat (nach I) zum Fluchtpunkte C_0 und demnach als Bild die Gerade $P'C_0$. Seine Spur (die ja die Orthogonalprojektion von P auf die Bildebene ist) wollen wir P_0 nennen (vgl. Nr. 50 Anm.). Da nun die beiden Geraden TI' und C_0P_0 sich in P schneiden (Fig. 98), so müssen die Geraden TP_0 und $I'C_0$ einander parallel sein; somit ist P_0 der Schnittpunkt der Geraden C_0P' mit der durch

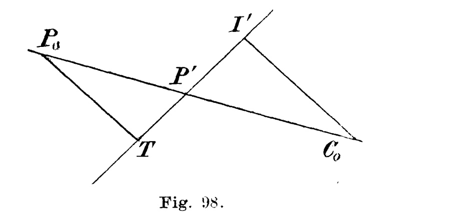


Fig. 98.

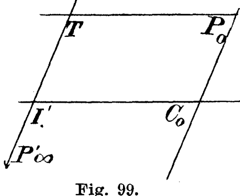


Fig. 99.

T zu C_0I' gezogenen Parallelen. — Man beachte, daß die Lösung sich nicht wesentlich ändert, wenn P in der Verschwindungsebene liegt; dann geht (s. Fig. 99) P' ins Unendliche und P_0 ist die vierte Ecke des Parallelogramms, von dem $I'C_0$ und $I'T$ zwei aufeinanderfolgende Seiten bilden.

Aufgabe II. Durch eine Gerade die zur Bildebene senkrechte Ebene zu legen.

Auflösung: Wir unterscheiden zunächst drei Fälle, nämlich daß die Gerade schief, parallel zur Bildebene, oder in der Verschwindungsebene liegt.

1. Die gegebene Gerade sei $g \equiv (TI')$. Da die Fluchtgerade der gesuchten Ebene sowohl durch C_0 als auch I' gehen muß, so ist sie die Verbindungslinie i' dieser Punkte. Ihre Spurlinie, die wir mit g_0 bezeichnen wollen, da sie ja die Orthogonalprojektion von g ist, ist die durch T zu C_0I' gezogene Parallele.

2. Die gegebene Gerade sei hingegen $r \equiv (r'; TI', P')$. Da die Fluchtgerade i' der gesuchten Ebene sowohl durch C_0 gehen muß, als auch parallel zu r' sein (s. Nr. 54), so ist sie die durch C_0 zu r'

gezogene Parallele. Die Spurlinie r_0 aber muß ebenfalls parallel zu r' gehen; zu ihrer Bestimmung genügt daher noch ein einziger Punkt. Wir beachten daher, daß die gesuchte Ebene auch das vom Punkte $P \equiv (TI', P')$ gefällte Lot PP_0 enthalten muß. Dieses zu konstruieren und seinen Fußpunkt P_0 zu finden, lehrte uns die vorige Aufgabe. r_0 ist dann die durch P_0 zu r' gezogene Parallele.

3. Schließlich sei die Gerade gegeben als $r \equiv (TI', P'_\infty; UJ', Q'_\infty)$. Wir konstruieren uns die Orthogonalprojektionen P_0, Q_0 der Punkte P, Q (nach d. vor. Aufg.); ihre Verbindungslinie r_0 ist dann die Spur der gesuchten Ebene; die durch C_0 zu r_0 gezogene Parallele i' ist ihre Fluchtgerade. — Wäre aber die Gerade auf die in Nr. 56 angegebene Weise bestimmt, $r \equiv (ti')$, so würde die Fluchtgerade der fraglichen Ebene die durch C_0 zu i' gezogene Parallele j' sein, und ihre Spur erhielte man aus der (in Nr. 57 IV gegebenen) Bedingung, daß die Streifen ti' und uj' durch einfache Verschiebung müssen zur Deckung gebracht werden können.

Anmerkungen: 1. Die Lösung der beiden obigen Aufgaben ermöglicht uns die Orthogonalprojektion einer jeden, aus Punkten und Geraden bestehenden, Figur auf die Bildebene zu finden[1]).

2. In den vorigen Konstruktionen tritt wohl der Hauptpunkt auf, nicht aber der Distanzkreis.

71. Es sollen nun zwei Anwendungen der obigen Darlegungen angeführt werden.

a) **Von einer Geraden g kennt man die Spur T, die Orthogonalprojektion g_0 und die Neigung α gegen die Bildebene; ihren Fluchtpunkt I' und ihre Zentralprojektion g' zu finden.**

Der Punkt I' liegt (vgl. oben) auf der durch C_0 zu g_0 gezogenen Parallelen, er muß aber auch auf dem Kreise von der Neigung α liegen, also haben wir zwei solcher Punkte I_1', I_2', die diesen beiden Linien gemeinsam sind. $I_1'T$ und $I_2'T$ sind also die Geraden, die die Aufgabe lösen; sie ist immer möglich.

b) Wir haben gesehen, daß, wenn außer der Projektionsebene und dem Projektionszentrum ein Punkt $P \equiv (TI', P')$ gegeben ist, man seine Orthogonalprojektion P_0 auf die Bildebene finden kann: er ist ein bestimmter Punkt der Geraden C_0P'. Umgekehrt, wenn außer den Fundamentalelementen die Punkte P' und P_0 gegeben sind, die mit C_0 in einer Geraden liegen, so ist der Punkt P bestimmt als

1) Die analoge Aufgabe für die schiefe Parallelprojektion läßt sich gleichfalls lösen, da wir ja durch einen Punkt die zu einer gegebenen parallele Gerade ziehen können (Nr. 64) und durch eine Gerade die zu einer anderen parallele Ebene legen (Nr. 66).



Schnitt des Projektionsstrahles CP' mit der in P_0 zur π errichteten Senkrechten. Folglich:

Jeder Punkt des Raumes kann durch zwei Punkte P', P_0, die mit dem Hauptpunkte in gerader Linie liegen, (eindeutig) dargestellt werden.

Ebenso kann auch jede Gerade durch zwei beliebige Geraden r_0, r' der Bildebene dargestellt werden; ihr Spurpunkt ist der Schnitt $r_0 r'$ und ihr Fluchtpunkt der Schnitt von r' mit der durch C_0 zu r_0 gezogenen Parallelen. Folglich sind für alle zur Bildebene parallelen Geraden, und nur für solche, r' und r_0 einander parallel. Jede durch C_0 gezogene Gerade schneidet r' und r_0 in zwei Punkten, die zusammen einen Punkt von r darstellen. Damit zwei Geraden $r \equiv (r', r_0)$, $s \equiv (s', s_0)$ sich schneiden, ist notwendig und hinreichend, daß die Punkte $P' \equiv r's'$ und $P_0 \equiv r_0 s_0$ mit C_0 in gerader Linie liegen; der Schnittpunkt wird dann durch das Paar (P', P_0) dargestellt usw.

Drei beliebige Punkte $P \equiv (P'P_0)$, $Q \equiv (Q'Q_0)$, $R \equiv (R'R_0)$ bestimmen eine Ebene, deren Spurlinie die Perspektivitätsachse der beiden Dreiecke $P'Q'R'$ und $P_0 Q_0 R_0$ ist; ihre Fluchtgerade enthält auch die Fluchtpunkte der Geraden QR, RP, PQ (s. oben). Wird eine Ebene durch zwei sich schneidende Geraden r, s bestimmt, so ist eine dritte ihrer Geraden x bestimmt, wenn man eine der Projektionen x' oder x_0 kennt, weil sich die eine aus der anderen leicht ergibt. Ebenso: wenn die eine der Projektionen eines Punktes gegeben ist, ergibt sich leicht daraus die andere. — Wir überlassen es dem Leser, diese Darstellungsmethode auf die Fundamentalaufgaben der Geometrie der Lage anzuwenden.

b) Geraden und Ebenen, die zueinander senkrecht sind.

72. Es seien gegeben eine Gerade r und eine Ebene τ, die zueinander senkrecht sind. Durch das Projektionszentrum legen wir eine Gerade a und eine Ebene α, die bzw. zu r und τ parallel laufen. Dann haben offenbar r und a denselben Fluchtpunkt, τ und α dieselbe Fluchtgerade. Wollen wir demnach die Beziehung zwischen den Fluchtelementen einer Geraden und einer dazu senkrechten Ebene untersuchen, so wird es gestattet sein, anzunehmen, daß beide durch das Projektionszentrum gehen.

Nachdem dies vorausgeschickt, betrachten wir die Elemente des Bündels mit dem Zentrum C und stellen zwischen ihnen eine eindeutige Beziehung her, indem wir jedem Strahle a desselben die durch C zu ihm senkrecht gelegte Ebene α zuordnen, und umgekehrt jeder Ebene α des Bündels den betr. Strahl a. Diese Korrespondenz, eine Korrelation im Bündel, besitzt offenbar kein Ordnungselement.

Schneiden wir dieses Bündel mit einer beliebigen Ebene, so erhalten wir in dieser eine eindeutige Korrespondenz zwischen den Punkten und Geraden in ihr, die ebenfalls keine Ordnungselemente besitzt; insbesondere wenn man als schneidende Ebene die Bildebene nimmt, so erhält man eine Beziehung, in der ein Punkt und eine Gerade sich entsprechen, wenn sie die Fluchtelemente einer Geraden und einer Ebene sind, die zueinander senkrecht stehen. Diese Korrespondenz kann man auch konstruieren, ohne von der Projektionsebene auszugehen, wie wir jetzt zeigen wollen.

Mit I' und i' sollen der Spurpunkt eines Projektionsstrahles a und die Spurlinie einer zu ihm senkrechten projizierenden Ebene α auf der Bildebene bezeichnet werden; wir zeichnen auch den Hauptpunkt C_0 und den Schnitt H der beiden Geraden i' und $I'C_0$. Ziehen wir (im Raume) CH, so wird $\sphericalangle I'CH$ ein Rechter sein, die beiden Geraden $I'H$ und CH werden beide zu i', und CC_0 senkrecht zu $I'H$ sein. Denken wir uns nun das Dreieck HCI' in die Bildebene niedergeklappt, indem wir es um HI' drehen, und beachten, daß es bei C rechtwinklig ist, und daß CC_0 seine Höhe, so sehen wir, daß C auf den Endpunkt K der Radien des Distanzkreises zu liegen kommt, die senkrecht zu C_0I' sind. Der rechte Winkel $I'CH$ wird dann zum rechten Winkel $I'KH$, und i' wird senkrecht zu C_0I' im Punkte H. Fassen wir alles zusammen, so ergibt sich:

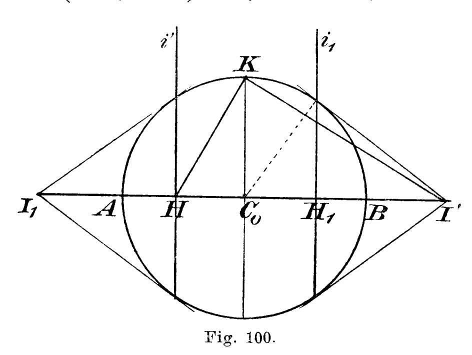


Fig. 100.

1) Ist I' der Fluchtpunkt einer Geraden a, so erhält man die gemeinsame Fluchtgerade aller zu a senkrechten Ebenen auf folgende Weise: Man verbinde (Fig. 100) I' mit dem Hauptpunkte C_0 und ziehe den zu C_0I' senkrechten Radius C_0K des Distanzkreises; die in K auf KI' errichtete Senkrechte treffe $I'C_0$ in H, die in H zu $I'C_0$ errichtete Senkrechte ist die Gerade i'.

2) Ist i' die Fluchtgerade einer Ebene α, so erhält man den, allen zu α senkrechten Geraden gemeinsamen, Fluchtpunkt folgendermaßen: Man fälle von C_0 auf i' das Lot C_0H und ziehe den zu i' parallelen Radius C_0K des Distanzkreises; die in K auf KH errichtete Senkrechte trifft HC_0 im gesuchten Punkte I'.

73. Aus unseren Konstruktionen ergibt sich, daß zwei beliebige entsprechende Elemente I', i' in der besprochenen Reziprozität immer zu verschiedenen Seiten des Hauptpunktes liegen, daher haben die

beiden Strecken C_0I' und C_0H entgegengesetzte Richtung und somit verschiedenes Vorzeichen. In dem rechtwinkligen Dreiecke HKI' ist nun absolut genommen $\overline{C_0H}\cdot\overline{C_0I'}=\overline{C_0K}^2$; nehmen wir aber Rücksicht auf das Vorzeichen und erinnern uns, daß wir CK mit d bezeichnet haben, so müssen wir schreiben:

$$\overline{C_0H}\cdot\overline{C_0I'}=-d^2.$$

Diese Beziehung führt uns zu einer wichtigen Folgerung. Betrachten wir nämlich (s. Fig. 100) die Polare i_1 des Punktes I' in bezug auf den Distanzkreis Δ, so ist diese senkrecht zu C_0I' in einem Punkte H_1, der (wenn A und B die Schnittpunkte von Δ mit C_0I' sind) zu H' harmonisch zugeordnet ist in bezug auf A, B als Grundpunkte. Da nun C_0 die Mitte von AB ist, so haben wir nach Größe und Vorzeichen

$$\overline{C_0I'}\cdot\overline{C_0H_1}=\overline{C_0A}^2 \quad \text{oder} \quad \overline{C_0I'}\cdot\overline{C_0H_1}=d^2.$$

Addieren wir diese Gleichung zu der vorigen, so erhalten wir

$$C_0I'\cdot(C_0H+C_0H_1)=0.$$

Nun ist aber C_0I' im allgemeinen nicht gleich 0, da I' ein beliebiger Punkt der Bildebene ist, also muß $C_0H_1=-C_0H$ sein, was uns beweist, daß die beiden Geraden i_1 und i' einander symmetrisch in bezug auf den Hauptpunkt liegen. — Ebenso ist der Pol I_1 von i' in bezug auf Δ symmetrisch zu I' in bezug auf C_0.

Folglich: **1. Um i' zu finden, wenn I' gegeben ist, konstruiere man zunächst die Polare i_1 von I' in bezug auf Δ; i' ist dann symmetrisch zu i_1 in bezug auf C_0. 2. Um I' zu finden, wenn i' gegeben ist, konstruiere man zunächst den Pol I_1 von i' in bezug auf Δ; I' ist dann symmetrisch zu I_1 in bezug auf C_0.**

Diese innige Beziehung zwischen der untersuchten Korrespondenz und der gewöhnlichen Polarität in bezug auf den Distanzkreis hat für jene den Namen der **Antipolarität** in bezug auf diesen Kreis herbeigeführt. Zufolge dessen werden ein Punkt und eine Gerade, die sich in dieser Korrespondenz entsprechen, als **Antipol** dieser bzw. als **Antipolare** jenes bezeichnet. Wir werden demnach als **antireziprok** zwei solche Punkte bezeichnen, von denen jeder auf der Antipolare des anderen liegt; sie sind dann Fluchtpunkte zweier zueinander senkrechten Geraden. Ebenso nennen wir zwei Geraden **antireziprok,** wenn jede den Antipol der anderen enthält; sie sind dann die Fluchtgeraden zweier zueinander senkrechten Ebenen. Jede beliebige Gerade der Bildebene enthält eine (elliptische) Involution von antireziproken Punkten, während ein beliebiger Punkt der Bildebene das Zentrum einer (elliptischen) Involution von antireziproken Geraden ist. Schließlich wollen wir mit **antireziprok** oder **antikonjugiert** solche Dreiecke bezeichnen, bei denen jede Ecke der Antipol der gegenüber-

liegenden Seite ist[1]). Jedes solche Dreieck kann angesehen werden als entstanden durch eine dreirechtwinklige Ecke, bei welchem die Fluchtpunkte der Kanten die Ecken des Dreieckes sind.

74. Die einfache Beziehung, die in der vorigen Nummer zwischen der Polarität und Antipolarität in bezug auf den Kreis Δ aufgestellt wurde, ermöglicht uns, aus den Eigenschaften der ersteren zahlreiche Sätze bezüglich der zweiten aufzustellen. Die interessantesten von ihnen haben folgenden Wortlaut:

I. Die außerhalb des Distanzkreises gelegenen Punkte der Bildebene haben als Antipolaren Sekanten dieses Kreises, den innerhalb gelegenen Punkten entsprechen Antipolaren, die den Kreis nicht schneiden.

II. Ein Punkt der Peripherie des Distanzkreises hat zur Antipolare die Tangente im diametral gegenüberliegenden Punkte.

III. Ein unendlich ferner Punkt hat zur Antipolare den zu seiner Richtung senkrechten Durchmesser; umgekehrt ein Durchmesser des Distanzkreises hat zum Antipol den in der zu ihm senkrechten Richtung liegenden unendlich fernen Punkt.

IV. Der Hauptpunkt ist Antipol der unendlich fernen Geraden.

V. Nähert (oder entfernt) sich ein Punkt dem Hauptpunkte, so entfernt (oder nähert) sich die Antipolare von ihm.

VI. Antireziproke Dreiecke haben in bezug auf den Distanzkreis entweder eine Ecke im Innern und zwei außerhalb, oder alle drei Ecken außerhalb.[2])

Um letzteres nachzuweisen, nehmen wir irgend einen Punkt A der Bildebene als Ecke eines antikonjugierten Dreieckes; liegt er z. B. innerhalb des Kreises Δ, so wird seine Antipolare a (gemäß I) Δ nicht schneiden, und da auf ihr die beiden anderen Ecken B, C eines jeden antikonjugierten Dreiecks, dessen eine Ecke A ist, liegen müssen, so ist damit die Existenz von antikonjugierten Dreiecken der ersten Art nachgewiesen. Nehmen wir dagegen A außerhalb des Kreises Δ an, so muß seine Antipolare a Δ in zwei reellen Punkten M und N schneiden. Es seien nun Q, R die (reellen) Punkte, in denen a die von A an den Distanzkreis gezogenen Tangenten schneidet. Nehmen wir dann als zweite Ecke eines antikonjugierten Dreiecks einen Punkt B der Strecke MQ (oder NR), so liegt dieser Punkt außerhalb von Δ, und da die Gerade AB Δ schneidet, so wird ihr Antipol (der die dritte

1) Die Bezeichnung autoantikonjugiert würde geeigneter, jedoch zu kompliziert sein.

2) Bekanntlich haben dagegen bei der Polarität zu sich selbst konjugierte Dreiecke alle eine Ecke innerhalb und zwei außerhalb.



Ecke des betr. Dreiecks bildet) auch außerhalb Δ liegen. Damit ist die Existenz solcher Dreiecke nachgewiesen, bei denen alle Ecken außerhalb Δ liegen. Würde man den Punkt B innerhalb der Strecke MN oder der Pseudostrecke QR nehmen, so würde man zu einem antikonjugierten Dreiecke der ersten Art gelangen.

Zur Übung: I. Der Hauptpunkt ist der gemeinsame Höhenpunkt für alle in bezug auf den Distanzkreis antikonjugierten Dreiecke. **II.** Alle diese Dreiecke sind spitzwinklig. **III.** Porisma: Ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck der Bildebene kann immer als ein antikonjugiertes in bezug auf einen Kreis, der dadurch bestimmt ist, angesehen werden.

75. Die bis jetzt aufgestellten Sätze helfen uns nun alle Aufgaben zu lösen, in denen zueinander senkrechte Geraden und Ebenen auftreten. Von den wichtigsten wollen wir nun die Lösungen angeben.

Aufgabe I. Von einem gegebenen Punkte auf eine Ebene das Lot zu fällen (Fig. 101).

Auflösung: Die gegebenen Stücke seien $P \equiv (TI', P')$ und $\tau \equiv [u, j']$[1]. Der Fluchtpunkt der gesuchten Geraden ist offenbar nichts anderes als der Antipol J' der Fluchtgeraden j' der gegebenen Ebene τ. Verbindet man J' mit P', so ist die Verbindungslinie x' das Bild der gesuchten Geraden; um noch ihren Spurpunkt U zu finden, hat man zu beachten, daß er ein Punkt der Geraden x sein muß derart, daß $I'J'$ und TU einander parallel sind. Diese Konstruktion — in der die Spurlinie u der gegebenen Ebene nicht vorkommt — ändert sich nicht, wenn P in der Verschwindungsebene (P' also im Unendlichen) liegt, oder auf der Ebene τ selbst. Wenn der letztere Fall nicht eintritt, so ist der Punkt, in welchem die Gerade x die Ebene τ trifft, die Orthogonalprojektion von P auf τ.

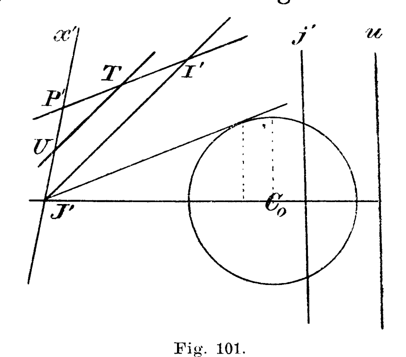


Fig. 101.

Aufgabe II. Durch einen Punkt die zu einer gegebenen Geraden senkrechte Ebene zu legen.

Es ist zweckmäßig, die drei Fälle zu unterscheiden, daß die Gerade schief zur Bildebene läuft, parallel dazu ist, oder in der Verschwindungsebene liegt. In allen drei Fällen möge der Punkt gegeben sein als $P \equiv (TI', P')$.

1) Der Fall, daß τ parallel zur Bildebene ist, braucht nicht betrachtet zu werden, da dann die Aufgabe in eine schon in Nr. 70 I behandelte übergeht.

α) Die gegebene Gerade sei $r \equiv (UJ')$. Die Fluchtgerade der gesuchten Ebene ξ ist die Antipolare j' von J' in bezug auf den Distanzkreis. Um ihre Spur u zu finden, denken wir uns durch P in der Ebene ξ eine beliebige Gerade gelegt. Ihr Bild a' (Fig. 102) können wir zunächst durch P' gehend beliebig annehmen. Ihr Fluchtpunkt wird aber dann der Punkt $I_1' \equiv a'j'$ werden und ihr Spurpunkt T_1 ergibt sich daraus, daß TT_1 und $I'I_1'$ einander parallel sein müssen. Da nun a in ξ liegt, so muß die Spurlinie u von ξ durch T_1 gehen; u ist also die durch T_1 zu j' gezogene Parallele, und $\xi \equiv [u, j']$ ist die gesuchte Ebene. Die zu Ende der vorigen Aufgabe gemachten Bemerkungen finden auch auf diese Anwendung.

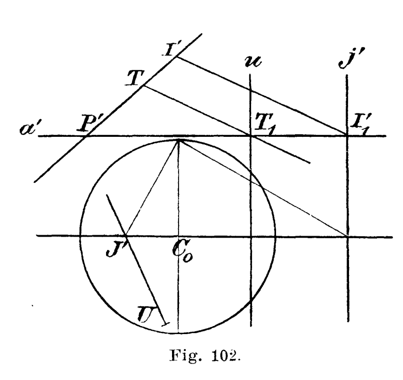


Fig. 102.

β) Ist die gegebene Gerade r parallel zur Bildebene, so kennt man — was hier am wichtigsten ist — ihre Richtung, wenn ihre Projektion r' gegeben ist. Ihr Fluchtpunkt I' ist dann der unendlich ferne von r', daher ist die Fluchtgerade der gesuchten Ebene (siehe Nr. 74, III) das von C_0 auf r' gefällte Lot j'; ihre Spurlinie u läßt sich dann durch den unter *α*) angegebenen Kunstgriff finden.

γ) Schließlich sei $r \equiv (TI', P'_\infty;\ UJ', Q'_\infty)$. Wir konstruieren die Orthogonalprojektionen P_0, Q_0 der Punkte P, Q. Der Fluchtpunkt J' von r ist der unendlich ferne der Geraden P_0Q_0, also die Fluchtgerade der gesuchten Ebene das von C_0 auf P_0Q_0 gefällte Lot j'. Die Spurlinie u läßt sich dann wie in den vorigen Fällen auffinden. — Wir überlassen es dem Leser, ausfindig zu machen, wie zu verfahren sei, wenn die gegebene Gerade als $r \equiv (ti')$ bestimmt ist.

Anmerkung: Ist X der Schnittpunkt der Geraden r mit der gesuchten Ebene ξ, so wird PX senkrecht zu r sein; wir sind demnach auch imstande, **von einem gegebenen Punkte auf eine Gerade das Lot zu fällen.**

Zur Übung: Ein Dreieck ist durch seine Ebene und die Bilder seiner Ecken gegeben; man bestimme den Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises.

76. Aufgabe III. Durch eine Gerade die zu einer gegebenen Ebene τ senkrechte Ebene zu legen.

Da der Fall, daß τ zur Bildebene parallel ist, auf eine schon (in Nr. 70 II) behandelte Aufgabe führt, so genügt es, für die Gerade r die in der vorigen Aufgabe angenommenen Fälle zu unterscheiden. Jedesmal sei τ gegeben als $\tau \equiv [uj']$.

α) Es sei $r \equiv (TI')$. Die Fluchtgerade i' der gesuchten Ebene ξ ist eine Antireziproke der Fluchtgeraden j' von τ, also geht sie durch den Antipol J' der Geraden j' (Fig. 103) in bezug auf den Distanzkreis. Da aber ξ durch r gehen soll, so muß i' auch durch den Fluchtpunkt I' von r gehen, es ist also $i' \equiv I'J'$; die durch T parallel zu i' gezogene Gerade t wird dann die Spur von ξ sein.

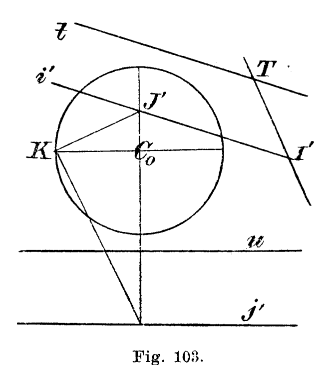


Fig. 103.

β) Es sei $r \equiv (r'; TI', P')$. Da die gewünschte Ebene ξ die (zur Bildebene parallele) Gerade r enthält, so müssen ihre Darstellungselemente parallel zu r' werden (s. Nr. 55 Anm.); zu ihrer Bestimmung genügt daher je ein Punkt. Beachten wir nun, daß ξ auch die durch $P \equiv (TI', P')$ senkrecht zur Ebene $[u, j']$ gezogene Gerade $s \equiv (UJ')$ enthält, so können wir diese Gerade (nach Aufg. I) zeichnen, die gesuchten Geraden sind dann die durch U und J' zu r' gezogenen Parallelen.

γ) Ist schließlich $r \equiv (TI', P'_\infty; UJ', Q'_\infty)$, so genügt es zur Lösung, von P und Q die Lote auf τ zu fällen, diese bestimmen die Ebene ξ. — Die Konstruktion vereinfacht sich, wenn wir r auf die in Nr. 56 angegebene Weise $r \equiv (ti')$ dargestellt sein lassen. Alsdann ist die Fluchtgerade von ξ die durch den Antipol von i' zu dieser gezogene Parallele j, während man ihre Fluchtgerade aus der Bedingung erhält, daß die beiden Streifen ti' und uj' durch einfache Verschiebung zur Deckung gebracht werden können (s. Nr. 57 VI).

Zur Übung: Gegeben zwei windschiefe Geraden: man soll eine der ∞^1 Geraden zeichnen, von denen jede der Schnitt zweier zueinander senkrechter Ebenen ist, die beide durch jene Geraden gehen.

Aufgabe IV. Das gemeinsame Lot auf zwei windschiefe Geraden zu finden (Fig. 104).

Auflösung: Die gegebenen Geraden seien $g_1 \equiv (T_1 I_1')$ und $g_2 \equiv (T_2 I_2')$, die gesuchte $x \equiv (TI')$. Da g_1 und x zueinander senkrecht, so sind I_1' und I' antireziprok, also liegt I' auf der Antipolaren i_1' von I_1', desgleichen liegt I' auf der Antipolaren i_2' von I_2'; er ist also der Schnittpunkt dieser beiden Geraden, d. i. mit anderen Worten der Antipol der Geraden $I_1'I_2'$. Nachdem

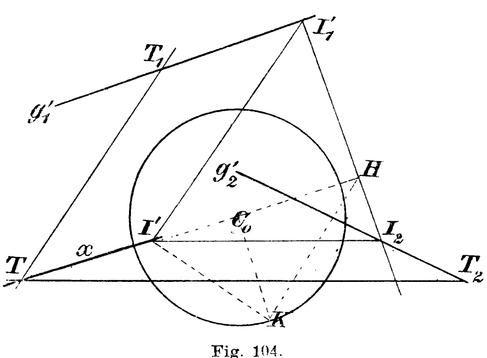


Fig. 104.

so der Fluchtpunkt von x gefunden ist, bekommt man den Spurpunkt T aus der Bemerkung, daß g_1 und x sich schneiden, weshalb die Geraden $I_1'I'$ und T_1T parallel sein müssen; ebenso müssen auch $I_2'I'$ und T_2T einander parallel sein; T ist also der Schnitt der beiden genannten Parallelen.

Zur Übung: Welche Änderungen erfährt die Konstruktion, wenn wenigstens eine der Geraden parallel zur Bildebene liegt?

Aufgabe V. Gegeben zwei sich schneidende Geraden: man soll die Halbierungslinien der von ihnen gebildeten Winkel bestimmen.

Aufgabe VI. Gegeben zwei sich schneidende Ebenen: man soll die Halbierungsebenen der von ihnen gebildeten Flächenwinkel bestimmen.

Wir überlassen es dem Leser, den Grundgedanken der Lösung dieser Aufgaben, die wir bei der Mongeschen Methode (in Nr. 33 und 34) gegeben haben, auf die Methode der Zentralprojektion zu übertragen.

Fünftes Kapitel.

Umlegungen.

a) Umlegung einer projizierenden Ebene.

77. Die allgemeinen Bemerkungen zu Anfang von Nr. 35 sind augenscheinlich auf jede Darstellungsmethode anwendbar; somit wird es zweckmäßig sein, sich zunächst im allgemeinen mit den Beziehungen zu beschäftigen, die zwischen der Zentralprojektion $\mathfrak{F}'$ einer ebenen Figur $\mathfrak{F}$ und der Figur $(\mathfrak{F})$ bestehen, die entsteht, wenn man die Ebene, welche $\mathfrak{F}$ enthält, in die Bildebene niederklappt, indem man sie um die Spurlinie sich drehen läßt. Der größeren Klarheit halber behandeln wir zuerst die Umlegung einer projizierenden Ebene, alsdann die einer beliebigen Ebene, um schließlich noch einige Bemerkungen über die Umlegung einer zur Bildebene parallelen Ebene anzufügen.

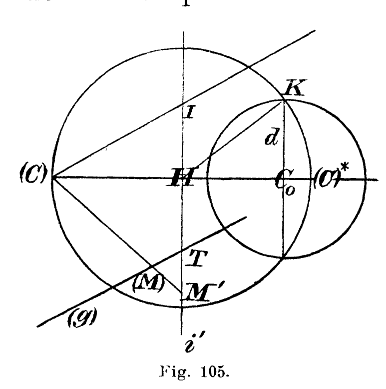


Fig. 105.

Es sei t (Fig. 105) die (mit der Fluchtgeraden zusammenfallende) Spur einer projizierenden Ebene τ. Vom Projektionszentrum C (das der Annahme gemäß in τ liegt) fällen wir das Lot CC_0 auf die Bildebene π, sowie auch auf die Spur t das Lot CH, dann wird C_0H auch senkrecht zu t sein. Jetzt denken wir uns die Ebene τ um t

gedreht; dann beschreibt C einen Kreis, dessen Ebene CC_0H ist, dessen Zentrum H und dessen Radius $CH = \sqrt{\overline{CC_0}^2 + \overline{C_0H}^2} = \sqrt{d^2 + \overline{C_0H}^2}$ ist. Wenn am Ende der Drehung τ auf π liegt, so befindet sich der Punkt C auf der Geraden C_0H, dem vom Hauptpunkte auf die Spur t gefällten Lote, in einer Entfernung von H gleich der Hypotenuse HK des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten C_0H und der Distanz d.

Schneidet nun der mit HK um H beschriebene Kreis die Gerade C_0H in den beiden Punkten (C), $(C)^*$, so sind diese die Umlegungen des Projektionszentrums, und zwar je nach dem Sinne, in welchem die Umlegung erfolgte. — Es sei nun $g \equiv (TI')$ eine beliebige Gerade der Ebene τ, dann liegen T und I' auf der Spurlinie t. Die Geraden CI' und g sind parallel und bleiben es natürlich auch nach erfolgter Umlegung; also sind auch die Umlegungen $(C)I'$ und (r) einander parallel.[1] Da nun (g) ebenfalls durch T geht, **so ist (g) nichts anderes, als die durch den Spurpunkt T zu $(C)I'$ gezogene Parallele.**

Will man die Umlegung (M) eines beliebigen Punktes $M \equiv (TI', M')$ der Geraden $g \equiv (TI')$ haben, so hat man nur M' von (C) auf (g) zu projizieren, eben weil die drei Punkte C, M, M' auch bei der Umlegung in gerader Linie bleiben.

Zu beachten ist, daß die Konstruktionen sich nicht ändern, wenn τ senkrecht zu π ist; nur werden dann (C) und $(C)^*$ die Endpunkte des zur Spur t senkrechten Durchmessers des Distanzkreises. Ferner ist zu beachten, daß der Abstand des Projektionszentrums von der Geraden $g \equiv (TI')$ gegeben wird durch die Entfernung zwischen (C) und (g).

78. Diese einfachen Konstruktionen ermöglichen es uns nun, jene Probleme der metrischen Geometrie, die wir schon früher (in Nr. 37) als Fundamentalaufgaben bezeichnet haben, in einer ebenso einfachen Weise zu lösen, wie wir jetzt zeigen wollen.[2]

Aufg. I. Den Abstand zweier Punkte zu bestimmen.

Es seien $A \equiv (TI', A')$ und $B \equiv (UJ', B')$ die beiden gegebenen Punkte, und ihre Verbindungslinie sei g, die — wie wir zunächst annehmen wollen — keine spezielle Lage gegen die Beziehungselemente haben möge. Den Spurpunkt und den Fluchtpunkt von g, den wir ja nach Nr. 67 bestimmen können, wollen wir S und F' nennen

1) Wir haben hier als Umlegung von C den Punkt (C) genommen; in ähnlicher Weise hätte man zu verfahren, wenn man $(C)^*$ gewählt hätte.

2) Dem Leser wird es nicht entgehen, daß auch die in Kap. 2, Nr. 61, 62 behandelten Lösungen in letzter Linie auf geeigneten Umlegungen beruhen.

(Fig. 106). Die Darstellungselemente ti' der g projizierenden Ebene fallen mit der Geraden SF'' zusammen; legen wir nun jene Ebene nieder und bestimmen die Lagen, die C, g, A, B infolge dessen annehmen, so liefert uns die Strecke $\overline{(A)(B)}$ offenbar den gesuchten Abstand.

Wenn A und B mit C in gerader Linie liegen, so fallen A' und B' aufeinander, und die projizierende Ebene wird unbestimmt; die

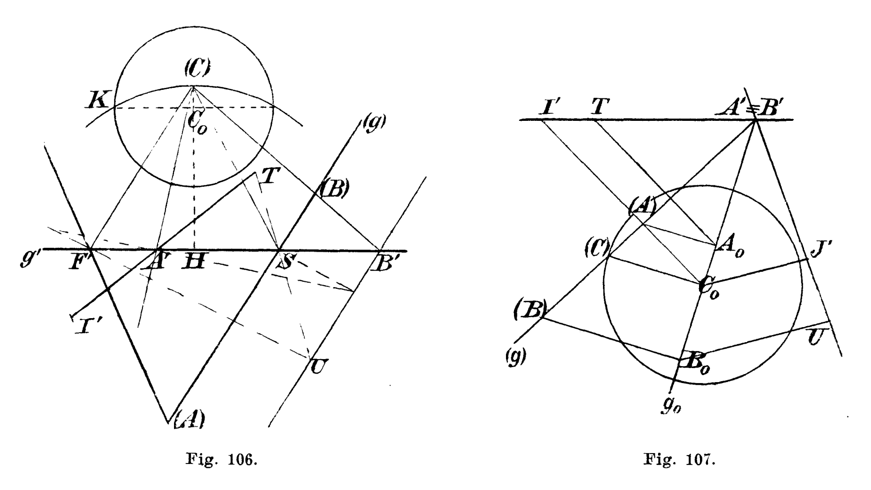


Fig. 106. Fig. 107.

obige Lösung ist dann nicht anwendbar und kann durch folgende ersetzt werden: Wir konstruieren uns (nach Nr. 70) die Orthogonalprojektionen A_0, B_0 der beiden Punkte auf die Bildebene π. Dann sind $A_0 B_0 C_0$ und der Punkt $A' \equiv B'$ vier Punkte einer Geraden g_0. Wir legen nun die Ebene $CC_0 A_0 B_0$ in die π nieder. Dann wird (s. Fig. 107) der Punkt (C) Endpunkt des zu g_0 senkrechten Radius des Distanzkreises. Verbinden wir nun (C) mit $A' \equiv B'$, so erhalten wir (g), die von den in A_0 und B_0 zu g_0 errichteten Senkrechten in (A) und (B) geschnitten wird; der Abstand $\overline{(A)(B)}$ ist der gesuchte.

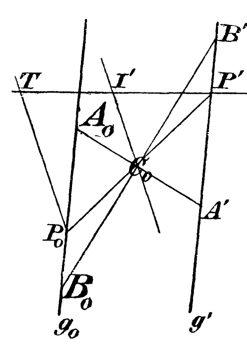


Fig. 108.

Würde hingegen die Gerade AB parallel zur Bildebene sein, so würde die gesuchte Länge gleich der Strecke $\overline{A_0 B_0}$ zwischen den Orthogonalprojektionen der Punkte sein. Nehmen wir nun an, daß die Gerade $g \equiv AB$, die nicht der Verschwindungsebene angehört, als $g \equiv (g';\ TI',\ P')$ dargestellt sei, so konstruieren wir uns zunächst (s. Fig. 108) die Orthogonalprojektion P_0 des Punktes P. Die durch P_0 zu g' gezogene Parallele ist g_0, und dann sind A_0, B_0 nichts anderes als die Projektionen der Punkte A', B' von C_0 aus.

In dem Falle schließlich, daß g in der Verschwindungsebene liegt, gilt dasselbe wie oben. Die beiden Punkte werden dann dargestellt sein als $A \equiv (TI', A'_\infty)$, $B \equiv (UJ', B'_\infty)$, und A_0 und B_0 werden dann (Fig. 109) konstruiert, wie in Nr. 70 angegeben. $\overline{A_0 B_0}$ ist dann gleich $\overline{AB}$.

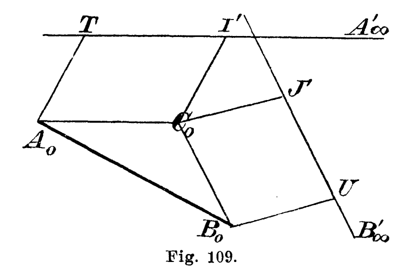


Fig. 109.

Zur Übung: Gegeben eine Gerade g und ein Punkt P auf ihr: gesucht ein zweiter Punkt X auf ihr, so daß die Strecke PX eine gegebene Länge l hat (vgl. Nr. 37).

Aufgabe II. Den Abstand eines Punktes P von einer Ebene τ zu bestimmen.

Auflösung: Man fälle von P auf τ das Lot; der Fußpunkt sei F. Dann ist der gesuchte Abstand gleich der Strecke PF. Nun hat man noch die PF projizierende Ebene in die Bildebene umzulegen, dann wird $\overline{(P)(F)} \equiv \overline{PF}$ sein.

Zur Übung: Den Abstand des Projektionszentrums von einer Ebene $\tau \equiv [ti']$ zu bestimmen.

Besondere Wichtigkeit bietet der Fall, daß τ mit der Bildebene π zusammenfällt. In diesem Falle wird der gesuchte Abstand gemessen durch den absoluten Wert der Kote p des Punktes P. Um p zu finden, konstruieren wir uns zunächst (s. Fig. 110) die Orthogonalprojektion P_0 von P und legen dann das Dreieck CC_0P' in die Bildebene um. Dann kommt C auf einen der Endpunkte des zu C_0P' senkrechten Durchmessers des Distanzkreises zu liegen, und P in einen Punkt, in welchem die Gerade $(C)P'$ von der in P_0 auf C_0P_0 errichteten Senkrechten getroffen wird. $\overline{(P)P_0}$ ist der gesuchte Abstand. — Man beachte, daß die Kote des gegebenen Punktes positiv oder negativ ist, je nachdem die beiden Strecken $(P)P_0$ und $(C)C_0$ den gleichen oder entgegengesetzten Sinn haben. Die in Nr. 58 angegebene Gleichung (1) läßt sich aus Fig. 110 sogleich ablesen.

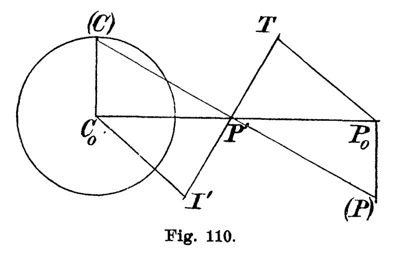


Fig. 110.

Aufgabe III. Den Abstand zweier paralleler Ebenen zu bestimmen (Fig. 111).

Auflösung. Es seien $[t_1 i']$, $[t_2 i']$ die beiden zueinander, aber nicht zur Bildebene parallelen Ebenen. Wir schneiden sie mit der zu ihrer gemeinsamen Fluchtgeraden i' senkrechten projizierenden Ebene,

dann erhalten wir zwei einander parallele Geraden $r_1 \equiv (T_1 I')$, $r_2 \equiv (T_2 I')$, deren Abstand dann gleich dem gesuchten ist. Legen wir jene Ebene um und zeichnen (r_1) und (r_2), so ist die Aufgabe gelöst. Würden aber beide Ebenen parallel zur Bildebene sein, also $\tau_1 \equiv [T_1 I_1', A_1']$, $\tau_2 \equiv [T_2 I_1', A_2']$, so wäre der gesuchte Abstand gleich der Differenz oder Summe der absoluten Werte der Koten von A_1 und A_2, die zu bestimmen wir soeben gelernt haben.

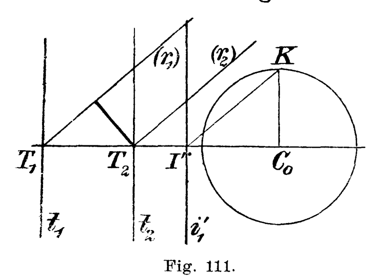


Fig. 111.

Folgesatz: Der Winkel $C_0 I' K$ gibt uns (s. Nr. 62, Aufg. II) die Neigung β der beiden Ebenen gegen die π, daher ist der gesuchte Abstand die β gegenüberliegende Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $T_1 T_2$. Somit haben wir: **Der Abstand zweier einander** (aber nicht zu π) **parallelen Ebenen ist gleich dem Abstande ihrer Spuren mal dem Sinus ihres Neigungswinkels** gegen die π.

Zur Übung: Wende diese Bemerkung an auf die Bestimmung der (zwei) Ebenen, die zu einer gegebenen in bestimmten Abständen parallel sind, sowie auf die Bestimmung der Punkte, die von drei gegebenen Ebenen bestimmte Abstände haben.

79. Aufgabe IV. Den Winkel zu bestimmen, den zwei gegebene Geraden miteinander bilden (Fig. 112).

Es seien $r_1 \equiv (T_1 I_1')$, $r_2 \equiv (T_2 I_2')$ die gegebenen Geraden. Der gesuchte Winkel ist offenbar derselbe, wie der, den die beiden zu ihnen parallelen Projektionsstrahlen p_1, p_2 miteinander bilden. Diese haben als Spurpunkte I_1', I_2' und bestimmen eine Ebene, die als Spur- und Fluchtlinie die Verbindungslinie $I_1' I_2'$ hat. Legen wir nun diese Ebene in die π um, bestimmen (C) und verbinden (C) mit I_1' und I_2', so erhalten wir (p_1) und (p_2), die miteinander den gesuchten Winkel bilden. Wie vorauszusehen war, werden die Spuren von r_1 und r_2 bei dieser Konstruktion nicht benutzt. Wäre eine der Geraden, etwa r_1, parallel zu π, so würde ihr Fluchtpunkt I_1' der unendlich ferne Punkt von r_1' sein, und die obige Konstruktion würde mit einer kleinen Abweichung Geltung behalten; läge sie überdies noch in der Verschwindungsebene, so könnte man (nach Nr. 70) ihre Orthogonalprojektion r_0 aufsuchen, und der unendlich ferne Punkt von r_0 würde dann I_1' sein, und die vorige Konstruktion könnte wiederum angewandt werden.

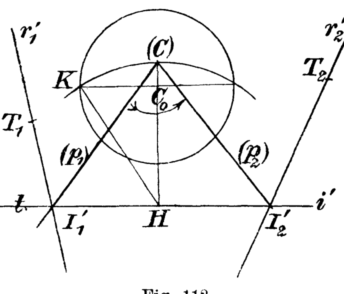


Fig. 112.

Folgesatz: Aus dem Obigen folgt: **Die Winkel zwischen zwei Geraden sind gleich den Winkeln zwischen den Geraden, die das Projektionszentrum mit den Fluchtpunkten verbindet, nachdem man es mit der sie enthaltenden (zu beiden Geraden parallelen) Ebene in die π umgelegt hat.**

Zur Übung: I. Gegeben die Fluchtlinie einer Ebene und der Fluchtpunkt einer in ihr gelegenen Geraden: gesucht die gemeinsame Richtung aller der Geraden jener Ebene, die diese Gerade unter einem gegebenen Winkel schneiden. **II.** Ein Dreieck ist seiner Gestalt nach bestimmt, wenn man die Fluchtgerade seiner Ebene und die Projektionen seiner Ecken kennt.

Aufgabe V. Den Winkel zweier Ebenen zu bestimmen (Fig. 113).

Wäre eine der Ebenen parallel zu π, so würde die Aufgabe nicht verschieden sein von der schon (Nr. 62) gelösten, die Neigung einer Ebene zu finden. Die beiden Ebenen seien also $\tau_1 \equiv [t_1 i_1']$, $\tau_2 \equiv [t_2 i_2']$. Wir betrachten die zu ihnen senkrechten Projektionsstrahlen p_1, p_2; diese haben als Spurpunkte die Antipole I_1', I_2' der Geraden i_1', i_2'; die durch sie bestimmte Ebene legen wir in die π um, indem wir sie um die Gerade $i' \equiv I_1' I_2'$ drehen, die, nebenbei bemerkt, auch die Antipolare des Punktes $I' \equiv i_1' i_2'$ ist, und bestimmen (C). Die von den beiden Geraden $(p_1) \equiv (C)I_1'$ und $(p_2) \equiv (C)I_2'$ gebildeten Winkel sind die gesuchten. — Man beachte, daß die Spuren t_1, t_2 nicht zur Verwendung kommen.

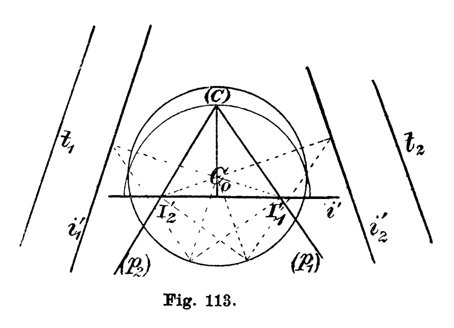


Fig. 113.

Zur Übung: Durch eine, in einer gegebenen Ebene gelegene, Gerade eine andere Ebene zu legen, die mit jener einen bestimmten Winkel bildet.

Mit Benutzung der Umlegung gelangen wir leicht zu folgendem

Porisma: Von einer Geraden kennt man die Projektion g', den Fluchtpunkt I', sowie von einer Strecke AB auf ihr die Projektion $A'B'$ und die Länge l; dann ist die Gerade g vollständig bestimmt.

Beweis: Man betrachte die g projizierende Ebene und lege sie in die π um; nimmt dann das Zentrum die Lage (C) an, so sind $(C)A'$ und $(C)B'$ die Umlegungen der Projektionsstrahlen CA und CB; die Umlegung von g wird dann eine zu $(C)I'$ parallele Gerade werden, von der Eigenschaft, daß die beiden Geraden $(C)A'$ und $(C)B'$ auf ihr ein Stück von der Länge l abschneiden. Damit ist (g) auf zwei Weisen bestimmt und kann durch ein Verfahren, das die Ele-

mentargeometrie lehrt, konstruiert werden. (g) schneidet g' in dem Spurpunkte der gesuchten Geraden.

b) Umlegung einer beliebigen Ebene.

80. Es sei $\tau \equiv [ti']$ eine beliebige, also nicht durch das Zentrum gehende, noch zur Bildebene parallele Ebene, P ein beliebiger Punkt in ihr, und P' dessen Bild. Dann sind π und τ die Träger zweier ebener perspektiver Systeme, deren Perspektivitätszentrum C und deren Achse t ist. i' ist die Grenzlinie für das System π, t^* für τ. Lassen wir nun τ um seine Spurlinie sich drehen, so wird immer zwischen den beiden betrachteten Systemen eine Projektivität bestehen bleiben, wenn wir als entsprechend immer die Projektion P' von P und die neue Lage, die P einnimmt, ansehen. t ist immer eine Doppelgerade, und daher ist jene Projektivität eine Perspektivität, deren Achse immer t bleibt, während das Zentrum veränderlich ist. Und wenn τ die angenommene Bewegung zu Ende geführt hat, indem sie mit der π zusammenfällt, dann haben wir in der Bildebene eine Homologie, deren Achse die Gerade t ist. Folglich:

Die Projektion $\mathfrak{F}'$ einer beliebigen ebenen Figur und ihre Umlegung $(\mathfrak{F})$ auf die Bildebene entsprechen sich immer in einer Homologie, deren Achse die Spurlinie der umgelegten Ebene bildet.

Um die Bestimmung dieser Korrespondenz zu vervollständigen, betrachten wir die Ebene $\sigma \equiv Ci'$ (die zu τ parallele projizierende Ebene) und denken uns, daß, während τ um t rotiert, σ um i' rotiert derart, daß sie immer zu τ parallel bleibt. Zu Ende der angenommenen Rotation wird σ ebenso wie τ auf der Bildebene angelangt sein, und das Zentrum C wird dann eine Lage (C) angenommen haben, die wir (nach Nr. 77) leicht finden können (s. Fig. 114). Jetzt betrachten wir eine beliebige Gerade g der Ebene τ. Sie hat natürlich ihren Spurpunkt T auf t, ihren Fluchtpunkt I' auf i' und läuft

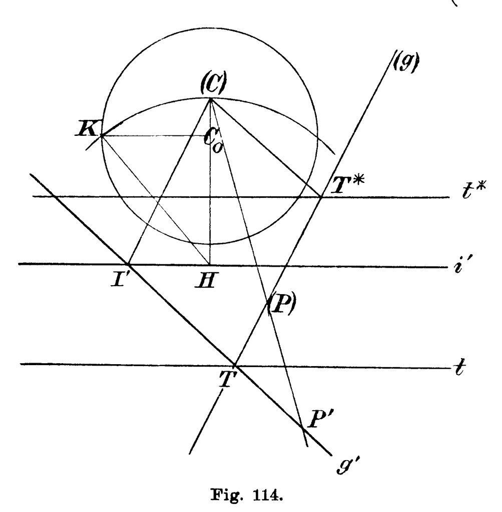


Fig. 114.

also parallel zum Projektionsstrahl CI'. Dieser Parallelismus wird auch bei der doppelten oben angenommenen Drehung bestehen bleiben und zum Schlusse derselben wird (g) parallel zu $(C)I'$ sein; (g) muß

aber auch durch T gehen, welcher Punkt, weil er der Achse angehört, sich nicht verändert hat. Somit ist (g) die durch T zu $(C)I'$ gezogene Parallele. So kann man für jede in τ gelegene Gerade, wenn man ihre Projektion kennt, die Umlegung finden. Es ergibt sich, daß im allgemeinen (g) von (g') verschieden ist; nur wenn g' durch (C) geht, fallen sie zusammen. Das zeigt uns, daß in der zwischen $\mathfrak{F}'$ und $(\mathfrak{F})$ bestehenden Homologie (C) das Zentrum eines Büschels von Doppelgeraden ist, also ist (C) das Zentrum jener Homologie. Zwei entsprechende Punkte P' und (P) der Geraden g' und (g) liegen mit (C) in gerader Linie; jedoch einem Punkte I' der ersteren entspricht der unendlich ferne der zweiten, somit ist i' Grenzlinie der Figuren $\mathfrak{F}'$. Beachten wir auch, daß die vierte Ecke des Parallelogramms $CI'T$ ein Punkt (T^*) ist, daher ist die durch (T^*) zu τ gezogene Parallele (t^*) Grenzlinie der Figuren $(\mathfrak{F})$.

Fassen wir die vorigen Ergebnisse zusammen, so erhalten wir den folgenden

Satz von Stevin: Wird eine (weder durch das Projektionszentrum gehende, noch zur Bildebene parallele) **Ebene $\tau \equiv [ti']$ in die Bildebene umgelegt, so besteht zwischen den Projektionen $\mathfrak{F}'$ und den Umlegungen $(\mathfrak{F})$ der Figuren $\mathfrak{F}$ von τ, eine Homologie, die 1. als Achse die Spur t von π hat, 2. als Grenzlinie von $\mathfrak{F}'$ die Fluchtlinie von τ, 3. als Zentrum der Homologie die Lage, die das Projektionszentrum bei der Umlegung der zu τ parallelen projizierenden Ebene in der Bildebene annimmt.**[1])

Dieser Satz verwandelt jede Aufgabe, die Umlegungen und Wiederaufrichten betrifft, in eine andere die Homologie betreffende.

c) Umlegung einer zur Bildebene parallelen Ebene.

81. Wir haben schon in Nr. 35 gesehen, daß man, um eine Ebene in eine zu ihr parallele zu verlegen, nichts weiter nötig hat, als sie einer Verschiebung in einer zu beiden Ebenen senkrechten Richtung zu unterwerfen. Dabei geht jeder Punkt der ersten in seine eigene Orthogonalprojektion auf die zweite über. Für den Fall, daß diese mit der Bildebene zusammenfällt, sind die betreffenden Konstruktionen schon (in Nr. 70) angegeben; jedoch wird es zweckmäßig sein, noch einige weitere Bemerkungen anzufügen. Die zu verlegende Ebene sei $\tau \equiv [TI', A']$; P sei ein beliebiger Punkt derselben und durch sein Bild P' gegeben. Die Orthogonalprojektionen A_0, P_0 von A und P liegen ersichtlich auf den Geraden C_0A', C_0P'; überdies sind die Geraden $A'P'$ und A_0P_0, weil sie beide zu AP parallel sind, es auch zueinander. Hieraus ergibt sich: Wenn wir von einer Figur

1) Vgl. den analogen in Nr. 36 aufgestellten Satz!

$\mathfrak{F}$ der Ebene τ die Zentral- und Orthogonalprojektion auf die Bildebene $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}_0$ betrachten, daß zwischen den Punkten und Geraden dieser Ebene eine eindeutige Korrespondenz besteht, derart, daß die Verbindungslinien entsprechender Punkte in einen Punkt C_0 zusammenlaufen, während zwei entsprechende Geraden einander parallel sind. Also entsprechen sich $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}_0$ homothetisch, sie sind ähnlich und ähnlich gelegen, mit dem Ähnlichkeitspunkte C_0, und es bilden A und A_0 ein Paar entsprechender Punkte. Um diese Beziehung festzulegen, genügt die direkte Konstruktion des Punktes A_0 als Orthogonalprojektion von A (Fig. 115). Um für P' den Punkt P_0 zu finden, hat man nur den Schnitt der Geraden C_0P' mit der durch A_0 zu $A'P'$ gezogenen Parallelen zu zeichnen. Ebenso findet man zu einer Geraden r' die entsprechende, indem man die Orthogonalprojektion P_0 eines ihrer Punkte P' bestimmt, und durch P_0 zu r' die Parallele zieht; diese ist dann r_0.

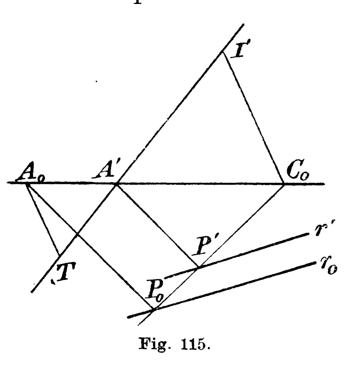


Fig. 115.

Diese homothetische Beziehung verschwindet, wenn τ mit der Verschwindungsebene zusammenfällt. Dennoch kann man zu jedem Punkte dieser Ebene die Orthogonalprojektion auf die Bildebene konstruieren, wie in Nr. 70 (Fig. 99) gezeigt wurde.

d) Anwendungen der Umlegungen.

82. Es sollen hier zunächst einige einfache Aufgaben aufgezählt werden, zu deren Lösung sich die Umlegungen als nützlich erweisen.

Aufgabe I. Den Neigungswinkel einer Geraden $r \equiv (TI')$ gegen eine Ebene $\tau \equiv [ti']$ zu finden.

Auflösung: Man lege durch r die zu τ senkrechte Ebene σ (s. Nr. 76), bestimme die Gerade $s \equiv \sigma\tau$ und lege dann σ in die π um. Der spitze Winkel zwischen (r) und (s) ist der gesuchte. Oder besser: der gesuchte Winkel ist das Komplement des Winkels, den r mit einer zu τ senkrechten Geraden bildet.

Aufgabe II. Den Abstand zweier paralleler Geraden r_1, r_2 zu finden.

Aufgabe III. Den Abstand eines Punktes P von einer Geraden g zu bestimmen.

Aufgabe IV. Durch einen Punkt P eine Gerade zu legen, die mit einer gegebenen g einen bestimmten Winkel bildet.

Auflösung: Bei Aufgabe II hat man die Ebene r_1r_2, bei III die Ebene Pg in die π umzulegen; bei IV bestimme man die Um-

legung (x) einer der gesuchten Geraden und bringe dann die Ebene Pg wieder in ihre alte Lage, um zur Darstellung von x zu gelangen.

Zur Übung: I. Durch einen Punkt eine Gerade von gegebener Länge zu legen, so daß sie parallel zu einer gegebenen Ebene wird, und der zweite Endpunkt in eine andere Ebene zu liegen kommt. — **II.** Gegeben ein Punkt und eine nicht durch ihn gehende Gerade: ein Quadrat zu konstruieren, dessen eine Ecke der Punkt ist, und dessen eine Seite auf jener Geraden liegt. — **III.** Ein regelmäßig n-seitiges Vieleck darzustellen, das durch seine Ebene und die Projektion zweier aufeinander folgender Ecken bestimmt ist. — **IV.** Einen Kreis darzustellen, dessen Ebene, Mittelpunkt und Radius bekannt ist. — **V.** Eine Kurve darzustellen, die gleich einem Kegelschnitte ist, dessen Ebene und Projektion man kennt. Die Brennpunkte herzuleiten. — **VI.** Die merkwürdigen Punkte eines Dreiecks zu bestimmen, von dem man die Ebene und die Projektionen der Ecken kennt.

Aufgabe V. Durch eine Gerade $g \equiv (TI')$ eine Ebene zu legen, die mit einer gegebenen $\tau \equiv [ti']$ einen gegebenen Winkel φ bildet.

Auflösung: Wir legen durch das Projektionszentrum C die Gerade s parallel zu g und die Ebene σ parallel zu τ. Dann ist offenbar $s \equiv CI'$ und $\sigma \equiv Ci'$. Die gesuchte Ebene ξ wird dann parallel zu der Ebene η sein, die durch s gelegt mit σ den Winkel φ bildet. Wir beginnen daher mit der Konstruktion von η. Zu diesem Zwecke fällen wir von I' das Lot $I'O$ auf σ und beachten, daß die ∞^1 Ebenen, die durch I' gehend mit σ den Winkel φ bilden, diese Ebene in den ∞^1 Tangenten eines bestimmten Kreises Γ mit dem Zentrum O schneiden; seinen Radius wollen wir r nennen. Jedoch nur die beiden von C aus an Γ gezogenen Tangenten x und y können eine durch s gehende und somit der Aufgabe genügende Ebene η liefern. Sind nun T_x und T_y die Schnitte von x und y mit i', so werden $I'T_x$, $I'T_y$ die Spuren der genannten Ebene η und die Fluchtlinien der gesuchten ξ sein. Da es sich nun um projizierende Ebenen handelt, so sind die Ebenen η hinlänglich bestimmt; es handelt sich also lediglich nur um die Punkte T_x, T_y.

Was noch die Größe des Radius r angeht, so erkennt man leicht, daß

$$r = \overline{I'O} \cdot \operatorname{ctg} \varphi,$$

oder, da $I'N$ senkrecht zu i' ist,

$$\overline{I'O} = \overline{I'N} \cdot \sin \beta,$$

wenn β die Neigung von τ bzw. σ gegen π ist; also wird

$$r = \overline{I'N} \cdot \sin \beta \cdot \operatorname{ctg} \varphi.$$

Um die Konstruktion in der Zeichenebene ausführen zu können, beachte man, daß das von I' auf die Ebene σ gefällte Lot p als Spurpunkt ebenfalls I' hat und als Fluchtpunkt den Antipol J der Geraden i' in bezug auf den Distanzkreis; diese Gerade kann daher

bezeichnet werden als $p \equiv (I'J)$. Sie trifft die Ebene σ in einem Punkte O, der als Projektion jenen Punkt O' hat, in dem sich die Geraden i' und $I'J$ treffen; daher kann man schreiben $O \equiv (I'J, O')$. Sind nun H und N die Fußpunkte der von J und I' auf i' gefällten Lote, so kann man offenbar schreiben $O' \equiv (HN, O)$. Um nun die Umlegung von O zu finden, hat man nur das (in Nr. 77 angegebene) allgemeine Verfahren anzuwenden und dies lehrt uns, daß (O) nichts anderes ist, als der Schnitt der Geraden $I'N$ und $(C)O'$. Ist nun K der Endpunkt des zu i' parallelen Radius des Distanzkreises, so ist der Winkel JKH ein Rechter, während der Winkel KHJ die Neigung β der gegebenen Ebene angibt. Wir ziehen nun durch N und I' die Parallelen bzw. zu HK und JK, die sich in $(\bar{O})$ schneiden mögen. Eine einfache Betrachtung der ähnlichen Dreiecke zeigt uns nun, daß $\overline{N(O)} = \overline{N(\bar{O})}$; hieraus ergibt sich eine andere, von F. Schütte bemerkte, Art, die Umlegung (O) zu finden, die des Punktes O' nicht bedarf, und folgende Konstruktion. Wir legen die Ebene σ in π um und bestimmen (C) in bekannter Weise mit Hilfe der Punkte H, K (s. Fig. 116). Um (O) zu finden, fällen wir das Lot $I'N$ auf i', ziehen durch N die Parallele zu HK und fällen von I' auf diese das Lot $I'(\bar{O})$; der mit $N(\bar{O})$ um N beschriebene Kreis trifft $I'N$ in (O). Legen wir an $I'(\bar{O})$ den Winkel $(90^0 - \varphi)$ an, dessen freier Schenkel $(\bar{O})N$ in R trifft, so ist $(\bar{O})R = r$. Der um (O) mit r beschriebene Kreis ist (Γ), an den wir von (C) aus die Tangenten ziehen, die i' in T_x bzw. T_y schneiden. Die Geraden $I'T_x$, $I'T_y$ sind die Fluchtgeraden i'_x, i'_y, die durch T zu ihnen gezogenen Parallelen t_x, t_y die Spurlinien der gesuchten Ebenen. — Damit die Aufgabe möglich sei, ist nötig, daß φ größer ist als der von g mit τ gebildete Winkel.

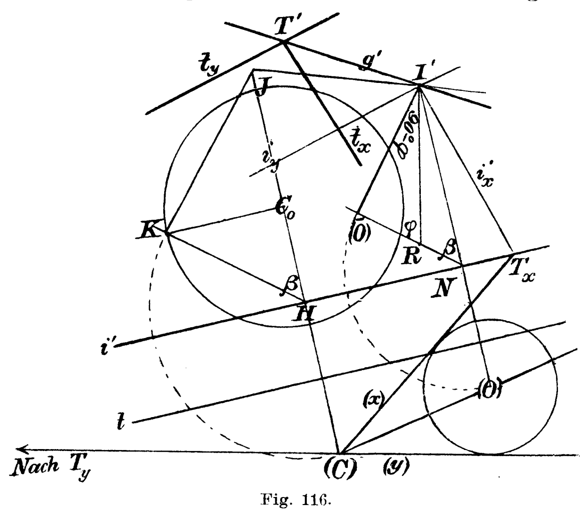


Fig. 116.

83. Die Umlegungen führen uns auch zur Aufstellung bemerkenswerter Sätze nach Art der schon früher (Nr. 63, 74, Übg. III) angeführten Porismen, wie dies folgende Beispiele zeigen mögen:

Porisma I. Jedes beliebige Viereck $1'2'3'4'$ in der Bildebene

kann als Projektion eines Quadrates mit der Seite l angesehen werden.

Um die Lage eines solchen Quadrates zu bestimmen, kann man noch z. B. die Neigung β seiner Ebene τ gegen die π angeben.

Beweis: Die Geraden $1'2'$ und $3'4'$ mögen sich in I'_1, dagegen $2'3'$ und $1'4'$ in I'_2 treffen; dann ist die Verbindungslinie i' dieser beiden Punkte die Fluchtlinie der Ebene τ des Quadrates (Fig. 117). Da nun die Seiten 12 und 14 zueinander senkrecht sind, so muß, wenn man τ umlegt (s. Nr. 79, Folgesatz), das Zentrum C auf die Peripherie des über $\overline{I_1'I_2'}$ als Durchmesser beschriebenen Kreises zu liegen kommen. Da übrigens auch die Diagonalen 13 und 24 zueinander senkrecht sind, so muß, wenn I_3' und I_4' die Schnitte von 31 und 42 mit i' sind, (C) auch auf dem über $\overline{I_3'I_4'}$ als Durchmesser beschriebenen Kreise liegen, wodurch (C) bestimmt ist. Jetzt fällen wir das Lot $(C)H$ auf i' und konstruieren das rechtwinklige Dreieck C_0HK mit dem gegebenen Winkel β bei H und der Hypotenuse $HK = H(C)$. Seine andere Kathete KC_0 liefert den Radius und das Zentrum C_0 des Distanzkreises. Alsdann können wir (nach Nr. 79, Porisma) die Umlegung (g) der Geraden 12, deren Fluchtpunkt I_1' und deren Projektion $1'2'$ ist, konstruieren, so daß das Stück $(1)(2)$ die gegebene Länge l hat. (g) schneidet dann g' im Spurpunkte T und die durch T zu i' gezogene Parallele ist die Spurlinie t der Ebene τ des Quadrates. Die Umlegung dieses wird die Figur sein, die dem gegebenen Vierecke in der Homologie entspricht, deren Zentrum (C), deren Achse t und deren Grenzlinie i' ist; daß diese Figur ein Quadrat ist, geht daraus hervor, daß sowohl zwei aufeinander folgende Seiten, als auch die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen; daß die Seiten die Länge l haben, ergibt sich aus der Konstruktion.

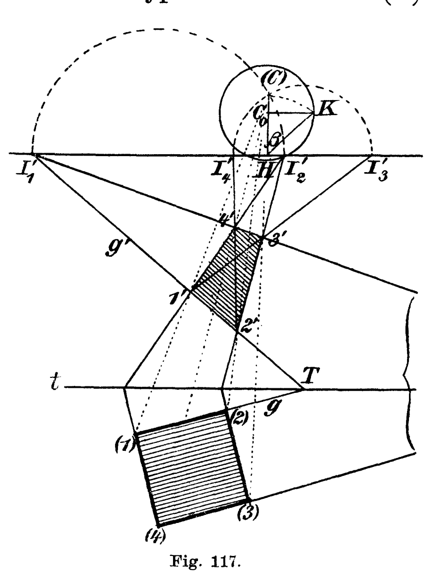


Fig. 117.

Zur Übung: Wieviel Lösungen hat die Aufgabe und wieviel können reell sein?

Porisma II. Ein beliebiger (etwa durch fünf Punkte gegebener) **Kegelschnitt K′ der Bildebene kann immer als Projektion aus einem geeignet gewählten Zentrum eines Kreises K angesehen werden,**

der in einer gegebenen Ebene τ liegt, die etwa durch ihre Spur t, die Fluchtlinie i' und die Neigung β bestimmt ist.

Beweis: Der Pol O' der Geraden i' in bezug auf K' wird die Projektion des Zentrums O des Kegelschnittes K sein, und daher werden irgend zwei durch O' gehende und in bezug auf K' konjugierte Geraden a_1', a_2' die Bilder zweier durch O gehender konjugierter Durchmesser von K sein. Ist nun dieser ein Kreis, so müssen a_1 und a_2 aufeinander senkrecht stehen, und dasselbe gilt auch für die Umlegungen (a_1), (a_2), die man erhält, wenn man τ in die π umlegt. Ist nun $I_1' = a_1'i'$, $I_2' = a_2'i'$, so werden (a_1) und (a_2) parallel zu

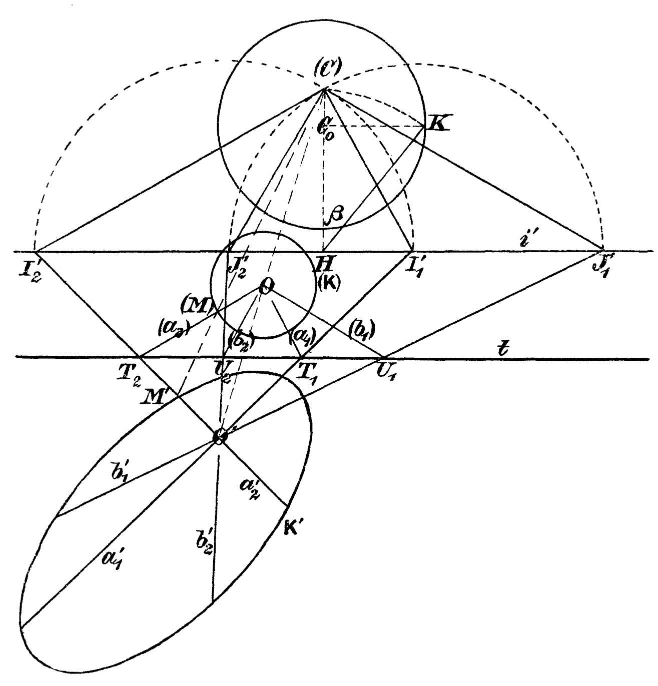


Fig. 118.

$(C)I_1'$ und $(C)I_2'$; (C) gehört demnach der Peripherie des Kreises mit dem Durchmesser $I_1'I_2'$ an. Ein zweites Paar $b_1'b_2'$ durch O' gehender konjugierter Geraden liefert einen zweiten Kreis für (C) (s. Fig. 118).

Fällen wir dann das Lot $(C)H$ auf i' und zeichnen das gleichschenklige Dreieck $(C)HK$ mit dem Winkel β bei H, so liefert das von K auf $(C)H$ gefällte Lot CC_0 Zentrum und Radius des Distanzkreises.

Sind weiter T_1, T_2, U_1, U_2 die Schnitte von t mit den Geraden a_1', a_2', b_1', b_2', so werden die durch diese Punkte zu den die Flucht-

punkte dieser Geraden von (C) aus projizierenden Strahlen gezogenen Parallelen sich in (O) treffen. Da nun (K) ein Kegelschnitt mit zwei Paaren zueinander senkrechten konjugierten Durchmessern ist, so muß er ein Kreis sein. Den Radius findet man, wenn man z. B. zu irgend einem Punkte M' von K' den entsprechenden (M) konstruiert in der durch (C), i', t definierten Homologie. — Es ist leicht einzusehen, daß die angeführte Konstruktion reell nicht ausführbar ist, wenn i' den Kegelschnitt K' in reellen Punkten schneidet.

Zur Übung: Ist in der Bildebene ein Dreieck $L'M'N'$ gegeben und eine Gerade i', so gibt es in einer passend gewählten Ebene, die i' zur Fluchtlinie und die Neigung β hat, immer ein Dreieck LMN kongruent mit einem gegebenen, das sich in $L'M'N'$ projiziert, wenn man das Projektionszentrum geeignet wählt.

Sechstes Kapitel.

Verlegung der Grundelemente und Verschiebung der abzubildenden Figuren.

a) Verlegung des Projektionszentrums.

84. Wie bei der Mongeschen Darstellungsmethode (vgl. Nr. 44), so kann es auch bei der jetzt behandelten zuweilen nützlich sein, die ursprünglichen Grundelemente durch ein anderes Projektionszentrum und eine andere Bildebene zu ersetzen. Offenbar sind diese beiden Veränderungen voneinander unabhängig und wir können sie daher nacheinander ausführen; daher wollen wir die für diese beiden Veränderungen geltenden Regeln getrennt betrachten.

Es werde wie bisher mit C das ursprüngliche Projektionszentrum bezeichnet, mit K das neue; C_0 sei der alte, K_0 der neue Hauptpunkt und d und e die entsprechenden Distanzen. Die beiden Distanzkreise haben nun zwei Ähnlichkeitszentra; wir wollen mit O dasjenige von ihnen bezeichnen, welches die Spur der Geraden CK in der Bildebene ist; demnach wird O der innere oder äußere Ähnlichkeitspunkt sein, je nachdem C und K auf verschiedenen oder auf derselben Seite der Bildebene π liegen. Bei einer Figur $\mathfrak{F}$ wollen wir, wie bisher, die Orthogonalprojektion mit $\mathfrak{F}_0$, die Zentralprojektion aber von C und K aus mit $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}^{\cdot}$ bezeichnen.

Zuallererst wollen wir nun die neue Darstellung einer beliebigen Geraden $g \equiv (TI')$ aufsuchen. Zu dem Zwecke beachten wir, daß ihr Spurpunkt T sowohl im alten als im neuen System derselbe bleibt, und daß ferner die beiden Fluchtpunkte I', $I^{\cdot}$ die Spurpunkte der durch C und K zu g gezogenen Parallelen sind. Infolgedessen



werden (Fig. 119) O, I', $I^{\cdot}$ in gerader Linie liegen, und $C_0 I$, $K_0 I^{\cdot}$ einander parallel sein. Daraus ersehen wir, daß $I^{\cdot}$ dem Punkte I' in der Homothetie entspricht, deren Zentrum O ist, und in der C_0 und K_0 entsprechende Punkte sind. Die Gerade $TI^{\cdot}$ ist also die neue Projektion $g^{\cdot}$ von g. — Handelt es sich um eine Ebene $\tau \equiv [ti']$, so bleibt ebenso ihre Spur t dieselbe, und ihre neue Fluchtgerade $i^{\cdot}$ ist diejenige Linie, die der Geraden i' in der genannten Homothetie entspricht. — Handelt es sich schließlich um einen Punkt $P \equiv (TI', P')$, so beachte man, daß die drei Punkte O, P', $P^{\cdot}$ in einer Geraden liegen müssen, nämlich der Spur der die Punkte C, K, O, P, P', $P^{\cdot}$ enthaltenden Ebene; man erkennt somit, daß $P^{\cdot}$ nichts anderes ist, als die Projektion des Punktes P' von O aus auf die Gerade $g^{\cdot}$.

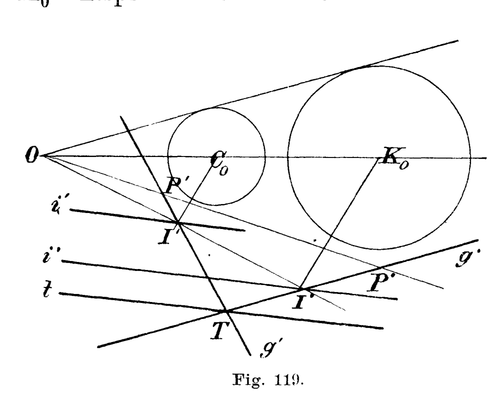


Fig. 119.

85. Spezialfälle. **a)** Die obigen Konstruktionen erfordern keine wesentlichen Modifikationen, wenn das neue Zentrum in die Verschwindungsebene des alten Systems fällt, mit anderen Worten, wenn $e = d$. Dann wird O der unendlich ferne Punkt von $C_0 K_0$ und die entsprechend gezeichneten Strecken, wie $\overline{I'I^{\cdot}}$, sind äquipollent mit $\overline{C_0 K_0}$, während alle Geraden, wie $P'P^{\cdot}$, parallel zu $C_0 K_0$ werden. Die neue Fluchtgerade einer Ebene $[ti']$ erscheint dann gegen die alte in der Richtung $C_0 K_0$ um eine Strecke gleich $C_0 K_0$ parallel verschoben.

b) Von nicht geringerer Wichtigkeit ist der Fall, daß das neue Zentrum mit dem alten auf derselben Senkrechten zur Bildebene liegt; dann fallen C_0 und K_0 zusammen mit O, und die Distanzkreise sind konzentrisch. Auch dann liegen O, I', $I^{\cdot}$ in gerader Linie und es ist

$$\frac{\overline{OI'}}{\overline{OI^{\cdot}}} = \frac{d}{e},$$

und daher entsprechen sich I', $I^{\cdot}$ in einer Homothetie, deren Zentrum O, und deren konstantes Verhältnis $\frac{d}{e}$ ist; in dieser entsprechen sich die beiden Fluchtgeraden derselben Ebene. Beachten wir auch noch, daß aus der obigen Beziehung folgt:

$$I^{\cdot}I' = (d - e) \cdot \frac{\overline{OI'}}{d},$$

und da nun $\frac{\overline{OI'}}{d}$ gleich dem Kotangens des Neigungswinkels α der betrachteten Geraden gegen die π ist (s. Nr. 61), so kann man auch schreiben

$$\overline{I'I^{\cdot}} = (d - e) \operatorname{ctg} \alpha,$$

welche Beziehung uns $I'I^{\cdot}$ auch konstruieren läßt als eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere $(d - e)$ mit dem anliegenden Winkel α ist.

Schließlich wird folgende Bemerkung nicht überflüssig sein: Will man das Zentrum in eine beliebige andere Lage K überführen, so kann man es zunächst parallel der Bildebene verschieben, bis es senkrecht über K_0 zu liegen kommt, und dann in einer dazu senkrechten Richtung verschieben, bis sein Abstand e wird, mit anderen Worten: das in voriger Nummer angegebene Verfahren kann durch eine Kombination der soeben angegebenen Konstruktionen ersetzt werden.

Anwendungen: 1. Durch eine Verlegung des Projektionszentrums kann man jede beliebige Ebene $\tau \equiv [ti']$ in eine projizierende verwandeln, ohne den Hauptpunkt zu verändern. Man braucht nämlich nur als neues Zentrum den Punkt zu wählen, in dem die in C_0 auf π errichtete Senkrechte die τ schneidet. Ist wieder e die neue Distanz, so hat man offenbar

$$\frac{d}{e} = \frac{\overline{C_0 i'}}{\overline{C_0 t}},$$

wenn wir mit $C_0 i'$ und $C_0 t$ den Abstand des Hauptpunktes von den Darstellungselementen der Ebene bezeichnen. Dadurch ist e bestimmt und die Transformation festgelegt.

2. Wenn die Zentra C und K gegeben sind, sowie ein Punkt $P \equiv (TI', P')$, so läßt sich, wie wir gesehen haben, der Punkt $P^{\cdot}$ finden mit Benutzung des Umstandes, daß O, P', $P^{\cdot}$ in gerader Linie liegen. Umgekehrt, wenn die Punkte P' und $P^{\cdot}$ gegeben sind, die mit O auf derselben Geraden liegen, außer C, K, so ist der Punkt P eindeutig bestimmt, indem nämlich die Geraden CP' und $KP^{\cdot}$ sich in ihm schneiden müssen. Zunächst treffen sich C_0P' und $K_0P^{\cdot}$ in der Orthogonalprojektion P_0, und somit wird P dargestellt als $P \equiv (P_0 C_0, P')$. Die beiden mit O allineierten Punkte P', $P^{\cdot}$ können somit als Darstellung des Punktes P gelten; ebenso können zwei Geraden g' und $g^{\cdot}$ als Darstellung der Geraden g angesehen werden, in der sich die beiden Projektionsebenen Cg' und $Kg^{\cdot}$ schneiden. — Die so entstandene Art der Darstellung wird als bizentrale Projektion bezeichnet; insbesondere wird sie als stereoskopische Projektion bezeichnet, wenn die Verbindungslinie der Zentra parallel zur Bildebene ist.



b) Verlegung der Bildebene.

86. Als neue Bildebene möge eine weder zur alten parallele, noch durch das Zentrum gehende Ebene $\rho \equiv [sf']$ genommen sein. Um auch hier ein einziges Zeichenblatt benutzen zu können, wird es nötig sein, jene Ebene ρ in die Bildebene π umzulegen. Der Fußpunkt des von C auf ρ gefällten Lotes, also der neue Hauptpunkt, sei K_0 und sein Abstand von C, die neue Distanz, sei e. Ist nun K_0' der Antipol von f' in bezug auf den ursprünglichen Distanzkreis, so ist K_0' die Projektion von $K_0 \equiv (sf', K_0')$. Was die Distanz e angeht, so kann sie nach Nr. 78, II bestimmt werden. — Legen wir die beiden Ebenen ρ und Cf' in die π um, so bekommen wir die entsprechenden Lagen (K_0) und (C) der Punkte K_0 und C; der Kreis um (K_0) mit dem Radius e ist dann die Umlegung des neuen Distanzkreises[1]).

Wir wollen im allgemeinen mit $\bar{\mathfrak{F}}$ die neue Projektion einer beliebigen Figur $\mathfrak{F}$ auf ρ bezeichnen, demnach würden die neuen Elemente einer Geraden $g \equiv [TI']$ mit U, $\bar{I}$ bezeichnet werden, und die der Ebene $\tau \equiv [ti']$ mit u und $\bar{i}$; dann ist U der Punkt $g\rho$, $\bar{I}$ der Schnitt des Projektionsstrahles CI' mit der Ebene ρ, während $\bar{i}$ der Schnitt von ρ mit der projizierenden Ebene Ci' sein wird, schließlich wäre $\bar{g}$ der Schnitt von ρ mit der projizierenden Ebene $Cg \equiv Cg'$. Demnach würde, da g und g' derselben projizierenden Ebene angehören, $\bar{g}'$ identisch mit g', und die Darstellungselemente von $\bar{g}$ in bezug auf die alte Projektionsebene würden die Punkte T_1 und I_1' sein, in denen s und f' von g' geschnitten werden. Daraus ergibt sich, daß man $(\bar{g})$ erhält, wenn man durch T_1 die Parallele zu $(C)I_1'$ zieht. Auch I' und $\bar{I}$ liegen auf demselben Projektionsstrahl und daher ist $\bar{I}' \equiv I'$; um $(\bar{I})$ zu finden, braucht man daher nur den Schnitt der beiden Geraden $(C)I'$ und $(\bar{g})$ zu bestimmen. Wir konstruieren nun nach Nr. 67 die Projektion U' des Punktes U; ziehen wir dann $(C)U'$, so schneidet diese $\bar{g}$ in (U). Nach der Umlegung von ρ in die π würden dann (U) und $(\bar{I})$ als die Darstellungselemente von g anzusehen sein.

Es sei nun $P \equiv (TI', P')$, dann liegen P' und $\bar{P}$ auf demselben Projektionsstrahl, $\bar{P}'$ fällt mit P' zusammen; somit erhält man $(\bar{P})$, indem man P' von (C) aus auf $(\bar{g})$ projiziert.

Endlich sei $\tau \equiv [ti']$ eine beliebige Ebene. Die Gerade $u = \tau\rho$ hat als Spur $T_2 \equiv st$ und als Fluchtpunkt $I_2' \equiv f'i'$; also bekommt man (u), wenn man durch T_2 die Parallele zu $(C)I'_2$ zieht. i' und $\bar{i}$

1) In vielen Fällen (z. B. wenn es sich um Probleme der Geometrie der Lage handelt) wird es nicht nötig sein, ihn zu zeichnen, da er in den betr. Konstruktionen nicht auftritt.

gehören derselben projizierenden Ebene an, also haben sie zusammenfallende Projektionen, jedoch liegt $\bar{i}$ in ρ, folglich sind die Darstellungselemente von $\bar{i}$ $T_3 \equiv i's$ und $I_3' \equiv i'f' \equiv I_2'$. Also ist $(\bar{i})$ die durch T_3 zu $(C)I_2'$ gezogene Parallele. Die Darstellungselemente von τ im neuen System sind dann (u) und $(\bar{i})$.

Die angegebenen Konstruktionen ermöglichen uns die neue Darstellung jeder beliebigen Figur zu finden, die als aus Punkten, Geraden und Ebenen gebildet angesehen werden kann.

Was noch die Bezeichnungen anlangt, so kann man nachträglich der Einfachheit halber die Klammern um die Buchstaben weglassen, um die neuen Darstellungselemente zu bezeichnen, wenn man immer nur daran denkt, daß die Umlegung der neuen Bildebene schon erfolgt sei.

87. Ist die neue Bildebene der alten parallel, so verlieren die obigen Konstruktionen ihre Gültigkeit und es erscheint besser, statt die Modifikationen, die dieser Fall erfordert, aufzusuchen, die Untersuchung ganz von neuem wieder aufzunehmen.

Die neue Bildebene liege z. B. in dem positiven Raumgebiete im Abstande l von der alten Bildebene. Eine Gerade $g \equiv (TI')$ habe als neue Elemente U und $\bar{I}$. Um auch hier in einer Zeichenebene operieren zu können, ersetzen wir diese durch ihre Orthogonalprojektionen U_0 und $\bar{I}_0$ auf die π, was offenbar einer Umlegung der ρ in die π gleichkommt (vgl. Nr. 81). Da nun der Projektionsstrahl $C\bar{I}I'$ parallel der Geraden TU ist, so sind die drei Strecken TI', $U\bar{I}$, $U_0\bar{I}_0$ äquipollent. Ist nun H der Punkt, in welchem CC_0 die ρ trifft, so ist $C_0H = l$ und die Gerade $H\bar{I}$ ist parallel zu $C_0\bar{I}_0$. Wird nun das Dreieck $C_0I'C$ auf die π umgelegt, so kommt C auf den Endpunkt (C) desjenigen Radius des Distanzkreises, der senkrecht zu C_0I' ist, und H auf den Punkt (H), wo dieser Radius von dem um C_0 mit l beschriebenen Kreise geschnitten wird, zu liegen. Die durch (H) zu C_0I' gezogene Parallele wird $(C)I'$ im Punkte $(\bar{I})$ treffen, und dann ist $\bar{I}_0$ der Fußpunkt des von $(\bar{I})$ auf C_0I' gefällten Lotes (s. Fig. 120). U_0 ist dann die vierte Ecke des Parallelogramms $\bar{I}_0I'T$.

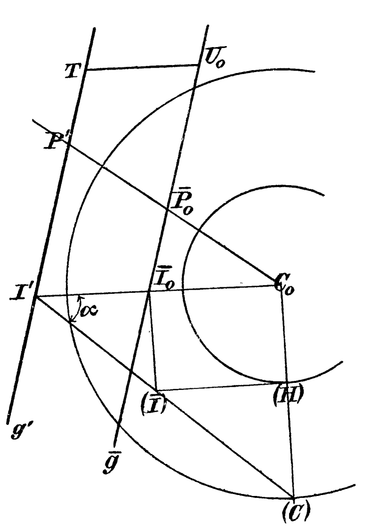


Fig. 120.

Also hat die Gerade g als neue Darstellungselemente die Punkte $\bar{I}_0$ und U_0.

Schließlich sei noch bemerkt, daß aus der Fig. 120 leicht folgt, wenn α die Neigung von g gegen π, daß

$$\overline{I'\overline{I}} = \overline{T\overline{U}_0} = l \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Ist ferner $P \equiv (TI', P')$, so muß offenbar $\overline{P}_0$ der Schnittpunkt der beiden Geraden $\overline{I}_0$ und C_0P' sein, so daß wir also auch jeden Punkt des Raumes in dem neuen System darstellen können.

Aus dem oben Gesagten auch die neue Darstellung einer beliebigen Ebene abzuleiten, wollen wir dem Leser überlassen.

c) Verlegung der darzustellenden Figuren.

88. Um die gegenseitige Lage der abzubildenden Figur und der Bezugselemente zu verändern, kann man auch, statt die letztere zu verlegen, wie wir vorhin angegeben haben, den Figuren selbst eine andere Lage im Raume geben. Die Operation einer beliebigen Bewegung einer Figur in Konstruktionen zu übertragen, führt nun bei der Zentralprojektion im allgemeinen zu derartigen Komplikationen, daß sie für die Zeichnung keinen wirklichen Nutzen liefern, auch wenn es sich um Rotationen um eine beliebige Achse handelt. In dem einfachsten Falle, daß die Figur sich um CC_0 als Achse dreht, ändert die Zentralprojektion nur die Lage, nicht die Gestalt. Andere Fälle, die nützlich werden könnten, sind die einfachen Verschiebungen, auch translatorische Bewegungen genannt; bei denselben werden die Fluchtelemente nicht verändert. Nun läßt sich jede beliebige Verschiebung dieser Art durch zwei andere ersetzen, von denen die eine parallel, die andere senkrecht zur Bildebene erfolgt. Was nun den Spurpunkt T einer beliebigen Geraden g angeht, so geht dieser bei der ersten Verschiebung in einen anderen Punkt U über, jedoch so, daß die Strecke TU äquipollent ist mit der Strecke p, die alle Punkte der bewegten Figur im Raume durchlaufen. Bei der zweiten Bewegung aber geht er über in einen Punkt V auf der Orthogonalprojektion g_0 von g, derart, daß $UV = l \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ ist, wo l die bei der senkrechten Bewegung durchlaufene Strecke und α die Neigung von g ist. Hieraus lassen sich nun die Umwandlungen ableiten, die in dem genannten Falle die Spurlinie einer beliebigen Ebene erfährt.[1])

1) Zur Klarstellung der Ideen, die zur Wahl der angewendeten manchmal komplizierten Bezeichnungen geführt haben, möge folgende Bemerkung dienen:
Oft haben wir auf die Elemente des Raumes geometrische Operationen ausgeführt, die sich alle auf den Typus der Grundoperationen des Schneidens und Projizierens zurückführen lassen. Um die Figuren deutlicher und den Text präziser zu gestalten, wird man zweckmäßig die entstandenen Figuren derartig bezeichnen, daß sie an die ursprüngliche Figur und die Art der Ableitung erinnern. Zu diesem Zwecke können die fraglichen Operationen durch



Siebentes Kapitel.

Übergang von der Methode der Zentralprojektion zu der von Monge und umgekehrt.

89. Eine Figur $\mathfrak{F}$ sei nach der Mongeschen Methode auf zwei zueinander senkrechte Ebenen π_1 und π_2 bezogen, so daß wir von $\mathfrak{F}$ die beiden Orthogonalprojektionen $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ haben. In bezug auf eine andere Bildebene π und ein Zentrum C möge sie die Projektion $\mathfrak{F}_1$ haben, und es soll die Lage in bezug auf die beiden Systeme als bekannt vorausgesetzt werden. Es soll untersucht werden, welche Beziehungen zwischen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$ bestehen, um aus den letzteren die erstere ableiten zu können und umgekehrt. **Es ist das Problem des Überganges von der einen Darstellungsmethode zur anderen.** Diese Aufgabe kann nun vereinfacht werden; zunächst kann man eine Verlegung der Bildebene vornehmen, nämlich π_1 (oder π_2) durch π ersetzen. Ist dann $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ das neue Bild von $\mathfrak{F}$, so hat $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ mit $\mathfrak{F}_1$ bekannte Beziehungen, die uns gestatten, die eine Figur aus der anderen herzuleiten. Somit ist die Frage zurückgeführt auf die Untersuchung der Beziehungen zwischen $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ und dem Paare $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$, und die Ableitung der Konstruktion von $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ aus $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$, und umgekehrt, wenn überdies noch die Lage des Projektionszentrums in bezug auf π_1 und π_2 bekannt ist, von denen die eine auch als Bildebene dienen soll. Die beiden Aufgaben, von denen die eine die Umkehrung der anderen ist, wollen wir nun einzeln und der Reihe nach behandeln.

90. Aufgabe I. Von einer Figur kennt man die Zentralprojektion in bezug auf ein gegebenes Zentrum und eine gegebene Bild-

die Buchstaben $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}^*$, $\mathfrak{S}^\bullet$ ... bzw. $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}^*$, $\mathfrak{P}^\bullet$ ... bezeichnet werden, und wenden wir diese auf eine beliebige Figur $\mathfrak{F}$ an, so entstehen neue Figuren, die man zweckmäßig mit $\mathfrak{S}(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{S}'(\mathfrak{F})$ ... bzw. $\mathfrak{P}(\mathfrak{F})$ ... bezeichnen kann. Dieses System besitzt den großen Vorzug, daß man eine genaue Bezeichnung für das Resultat hat, das man erhält, wenn man auf dieselbe Figur mehrere dieser Operationen in bestimmter Reihenfolge ausführt, hat aber den Nachteil komplizierter zu sein. Deshalb haben wir es, dem allgemeinen Gebrauche entsprechend, durch ein anderes ersetzt, das wir von Fall zu Fall erläutert haben. Im allgemeinen sei jedoch hier bemerkt, daß, wenn wir, um die Projektionen einer Figur $\mathfrak{F}$ zu bezeichnen, wir die Symbole $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}^*$ ... u. ä. anwenden, so sind die Zeichen $'$, ^{0}, *, ... u. ä., als Symbole von Operationen aufzufassen, ähnlich wie wenn man, nach Lagrange, die Abgeleitete einer Funktion f durch f', f'' ... bezeichnet. Ein ähnliches System kann für die Operation des Schneidens nicht angewendet werden, da sie die Dimensionen der Figuren, auf die man sie anwendet, nicht unverändert läßt, indem sich eine Fläche in eine Linie, eine Ebene oder Gerade in eine Gerade oder in einen Punkt verwandelt.



ebene; Grundriß und Aufriß zu bestimmen, für den Fall, daß die Bildebene im ersten System mit der Grundrißebene zusammenfällt (Fig. 121).

Auflösung: In der Zeichenebene seien schon als gegebene Stücke der Distanzkreis mit dem Zentrum C' und dem Radius d, sowie die Projektionsachse a_{12} gezeichnet. Alsdann kann man sogleich den Aufriß C'' des Zentrums C finden auf der Ordinate von C' im Abstande d von a_{12}. Da wir uns nun die Figur $\mathfrak{F}$ als aus Geraden, Punkten und Ebenen bestehend denken können, so zerfällt unsere Aufgabe in die folgenden drei einfacheren:

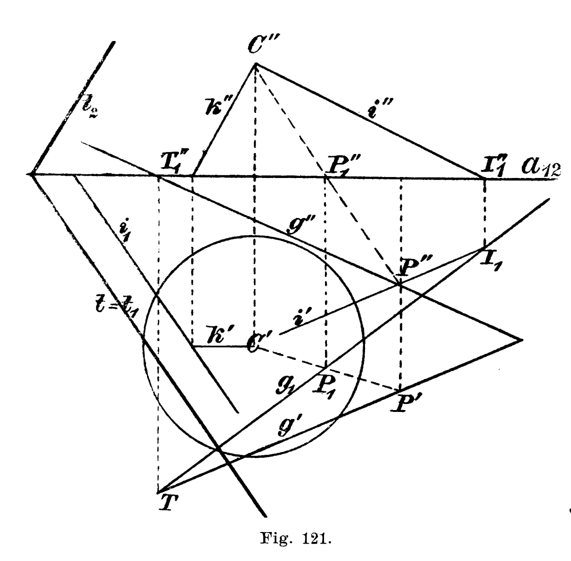


Fig. 121.

a) Gegeben die Zentralprojektion einer Geraden als $g \equiv (TI_1)$, gesucht der Grundriß g' und der Aufriß g''.

T ist zugleich der horizontale Spurpunkt T_1 von g, also ist $T \equiv T_1 \equiv T_1'$ und T_1'' ist der Fußpunkt des von T_1 auf a_{12} gefällten Lotes. g' und g'' müssen nun durch T_1' bzw. T_1'' gehen. Betrachten wir jetzt den Projektionsstrahl $CI_1 = i$. I_1' fällt wieder mit I_1 zusammen und I_1'' liegt auf der Achse, also sind $C'I_1'$ und $C''I_1''$ die beiden Orthogonalprojektionen i', i'' von i, da nun g parallel zu i ist, und dies bei der Orthogonalprojektion erhalten bleibt, so sind g' und g'' die durch T' bzw. T'' zu i' bzw. i'' gezogenen Parallelen. — Den Fall, daß g parallel zu π, werden wir hernach behandeln.

b) Gegeben der Punkt $P \equiv (TI_1, P_1)$, gesucht P', P''.

Da P' der Fußpunkt des von P auf die Bildebene gefällten Lotes ist, so kann er nach einer bekannten Methode (s. Nr. 70) konstruiert werden. Was P'' angeht, so beachte man, daß C, P, P_1 auf derselben Geraden liegen, also müssen es auch C'', P'', P_1''; nun ist P_1 ein Punkt der Grundrißebene, P_1'' muß also auf der Achse liegen, senkrecht über P_1; P'' ist also der Schnittpunkt von $C''P_1''$ mit der zu P' gehörigen Ordinate.

Hat man schon die beiden Bilder g', g'' der Geraden TI_1 gezeichnet, so läßt sich P' und P'' leicht finden, als Schnitt der Geraden $C'P_1'$ bzw. $C''P_1''$ mit g' bzw. g'' (s. Fig. 121).

c) Gegeben die Darstellung einer Ebene $\tau \equiv [t\,i_1]$ nach der Methode der Zentralprojektion, gesucht ihre Horizontal- und Vertikalspur.

Die Gerade t ist zugleich die Horizontalspur t_1; t_2 geht durch den Punkt $T_{12} \equiv ta_{12}$, um sie also festzulegen, genügt ein weiterer Punkt oder ihre Richtung. Beachten wir nun, daß τ parallel zur projizierenden Ebene Ci_1 ist, so können wir eine vertikale Hauptlinie k dieser Ebene leicht erhalten, indem wir diejenige nehmen, die durch C geht; nämlich k' läuft parallel zu a_{12}, und da die Spur von k auf i_1 liegt, so haben wir den Spurpunkt nur auf a_{12} zu loten, um sogleich k'' zu erhalten. t_2 ist dann die durch T_{12} zu k'' gezogene Parallele. — Der Fall, daß τ parallel zu π_1, wird sogleich behandelt. Es möge nun noch ein Hinweis auf spezielle Fälle gemacht werden.

a′) Die Gerade sei parallel zur Bildebene, ohne jedoch der Verschwindungsebene anzugehören, es sei nämlich $g \equiv (TI_1, A_1; g_1)$. Wir zeichnen nach **b)** die Projektionen A', A'' des Punktes A, dann sind g' und g'' die durch A' zu g_1 und durch A'' zur Achse a_{12} gezogenen Parallelen. Liegt $g \equiv (TI_1, A_1^\infty; UJ, B_1^\infty)$ in der Verschwindungsebene, so ist g' die Verbindungslinie $A'B'$, g'' die durch C'' zu a_{12} gezogene Parallele.

c′) Ist die Ebene τ zur Bildebene parallel, also $\tau \equiv [TI_1, A_1]$, so suche man die Projektionen A' und A'' von A. t_2 ist dann die durch A'' zur Achse gezogene Parallele, während t_1 im Unendlichen liegt.

91. Aufgabe II. Gegeben Grundriß und Aufriß einer Figur; gesucht ihre Zentralprojektion auf die Grundrißebene in bezug auf ein gegebenes Zentrum.

Auflösung: In der Zeichenebene hat man als gegeben anzunehmen die Achse a_{12} und die beiden Projektionen C', C'' des Zentrums; der Distanzkreis ist dann mit dem Abstande der Achse von C'' als Radius um C' zu beschreiben (s. Fig. 121). Wie die vorige Aufgabe, so zerlegen wir auch diese in drei einfachere.

a) Gegeben Grund- und Aufriß einer Geraden, gesucht die Zentralprojektion.

Der horizontale Spurpunkt T_1 der Geraden $g \equiv (g', g'')$ ist offenbar auch der Spurpunkt T für die zentralperspektivische Darstellung, der Fluchtpunkt I_1 ist dann nichts anderes, als die Horizontalspur des zu g parallelen Projektionsstrahles i. Der Gedanke dieser Lösung ist auch anwendbar in dem besonderen Falle, daß g senkrecht zur Achse ist, indem man dann in gleicher Weise die Spur jener Geraden und des parallelen Projektionsstrahles finden kann.

b) Den Punkt $P \equiv (P', P'')$ in Zentralprojektion darzustellen.

Die Projektion des Punktes P von C aus ist nichts anderes als die Horizontalspur P_1 des Projektionsstrahles CP. Um die Darstellung von P zu vervollständigen, hat man noch die Darstellung einer durch ihn gehenden Geraden nötig; als solche kann man zweckmäßig die von P auf die Bildebene gefällte Senkrechte nehmen, deren Spur ja P', deren Fluchtpunkt offenbar C' ist. Somit ist $P \equiv (P'C', P_1)$.

c) Die Ebene $\tau \equiv [t_1, t_2]$ zentralperspektivisch darzustellen.

t_1 ist wieder identisch mit t, dem ersten Darstellungselement von τ; die Fluchtgerade jedoch ist die Horizontalspur der Ebene, die durch C parallel zu τ gelegt wird, deren Spur wir also nach Nr. 23 mit Hilfe der vertikalen Hauptlinie, die durch C geht, leicht konstruieren können. — In dem besonderen Falle, daß τ durch die Achse geht (z. B. $\tau \equiv [A', A'']$), fällt t mit a_{12} zusammen, und um die Fluchtgerade zu finden, genügt es, den Fluchtpunkt irgend einer beliebigen Geraden der gegebenen Ebene zu bestimmen.

Anmerkung: Eine ähnliche Aufgabe, wie die vorige, ist das für die Praxis oft nützliche **Problem der angewandten Perspektive**; es besteht darin, von einem beliebigen Punkte $P \equiv (P', P'')$ die Zentralprojektion auf eine zur Grundrißebene senkrechte Bildebene $\pi \equiv [t_1, t_2]$ von einem Zentrum $C \equiv (C', C'')$ zu finden (Fig. 122). Um es zu lösen, hat man zunächst den Schnittpunkt P_1 der Ebene π mit der Geraden CP aufzusuchen. P_1' ist der Schnittpunkt von t_1 mit $C'P'$, P_1'' der von $C''P''$ mit der entsprechenden Ordinate. Wird die Konstruktion für alle Punkte von $\mathfrak{F}$ ausgeführt, so bekommt man $\mathfrak{F}_1$; will man letztere in wahrer Gestalt und Größe haben, so hat man nur π auf die Vertikalebene umzulegen. (P_1') kommt dann auf die Achse zu liegen in der Entfernung $T_{12}P_1'$ von T_{12}, und der gesuchte Punkt (P_1) ist der Schnitt der Ordinate von (P_1') mit der durch P_1'' zur Achse gezogenen Parallelen.

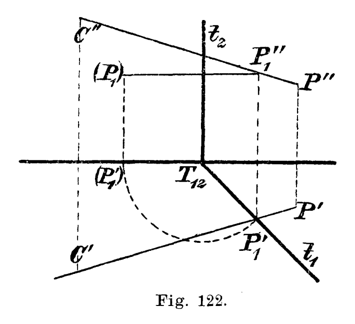


Fig. 122.

Den besonderen Fall, daß π auch zur Aufrißebene senkrecht steht, so daß man π als Seitenrißebene auffassen kann, haben wir schon früher (in Nr. 19) behandelt.

Drittes Buch.

Die Methode der kotierten Ebenen oder der kotierten Projektionen.

Erstes Kapitel.

Modifikationen der Methode der Zentralprojektion.

92. Wir nehmen die Betrachtungen wieder auf, die der Methode der Zentralprojektion zu Grunde liegen (Nr. 51), und modifizieren diese ein wenig, indem wir annehmen, daß außer dem Projektionszentrum C und der Projektionsebene π noch eine beliebige Ebene ι gegeben sei, die π in der Geraden f schneidet. Eine beliebige Gerade g des Raumes schneide π und ι bzw. in T und I, und es sei I' die Projektion von I auf π von C aus. Ist die Gerade g gegeben, so sind damit die Punkte T, I' offenbar bestimmt; umgekehrt, sind T und I' beliebig in π gegeben, so ist dadurch auch g als Verbindungslinie des Punktes T mit dem Punkte I, welcher die von I' auf ι von C aus gemachte Projektion ist, bestimmt. Somit besteht zwischen den Geraden des Raumes und den Punktepaaren auf π eine eindeutige Korrespondenz.

Ähnlich: Ist eine Ebene τ beliebig gegeben, so sind dadurch die Spuren t und i in den Ebenen π und ι gegeben und damit auch die Zentralprojektion i' von i auf π von C aus; offenbar müssen sich die beiden Geraden t und i' in einem Punkte von f treffen. Umgekehrt, sind in der Ebene π die beiden Geraden t und i' gegeben, die sich in einem Punkte der Geraden f schneiden, und projiziert man i' von C aus auf ι, so bestimmt die entstandene Gerade i, die t schneidet, mit ihr zugleich eine Ebene. Folglich besteht zwischen den Ebenen des Raumes und den Geradenpaaren in der Bildebene π, die sich in f schneiden, eine eindeutige Korrespondenz. Somit ergibt sich ein neues Verfahren, Geraden und Ebenen des Raumes darzustellen, und dieses fällt mit der gewöhnlichen Zentralprojektion zusammen, wenn man als Ebene ι die unendlich ferne Ebene des Raumes wählt. Um mit Hilfe derselben einen beliebigen Punkt des Raumes P darzustellen,

kann man seine Projektion von C aus auf π benutzen und eine Ebene oder eine Gerade, die durch P geht.

93. Diese **Methode der verallgemeinerten Zentralprojektion** schließt unzählige andere in sich, die man erhält, wenn man den Grundelementen C, π, ι eine besondere Lage im Raume oder zueinander erteilt. Besonders bemerkenswert ist der Fall, daß das Projektionszentrum im Unendlichen gelegen ist, also der unendlich ferne Punkt einer bestimmten Geraden l ist, und daß die Ebene ι parallel zu π ist[1]). Noch spezieller können wir annehmen, daß jene bestimmte Gerade l senkrecht zur Bildebene ist[2]); in diesem Falle ist das Darstellungssystem völlig bestimmt durch den Abstand d zwischen den beiden Fundamentalebenen, und diesen Abstand kann man zweckmäßig als Längeneinheit nehmen. In der Zeichenebene kann sie dann in wahrer Größe oder in verkleinertem Maßstabe gezeichnet sein. Unter dieser Voraussetzung wird dargestellt:

1. Eine beliebige Gerade g durch ihren Spurpunkt T und die Orthogonalprojektion I' ihres Schnittes I mit der Ebene ι; man kann also schreiben $g \equiv (TI')$. Dagegen wird eine zur Bildebene parallele Gerade durch ihre Orthogonalprojektion und ihren Abstand von der Bildebene, den man positiv zu nehmen hat, wenn sich g auf derselben Seite von π befindet wie ι, dargestellt, eine zu π senkrechte Gerade nur durch ihren Spurpunkt.

2. Eine beliebige Ebene τ durch ihre Spur t und die Orthogonalprojektion i' ihrer Spur i mit der Ebene ι, so daß man schreiben kann $\tau \equiv [ti']$. Eine zu π parallele Ebene kann durch ihren Abstand von π bestimmt werden, positiv genommen, wenn τ auf derselben Seite von π liegt wie ι; eine solche Ebene heißt dann eine Niveau-Ebene. Eine zu π senkrechte Ebene wird durch ihre Spurlinie dargestellt.

3. Ein beliebiger Punkt P durch seine Orthogonalprojektion P' und eine Gerade (TI') oder eine Ebene $[ti']$, die durch ihn geht, so daß man schreiben kann $P \equiv (TI', P')$ oder $P \equiv (ti', P')$.

94. Es sei $g \equiv (TI')$ eine beliebige Gerade des Raumes, dann wollen wir die Länge der Strecke TI' das Intervall der Geraden g nennen und für gewöhnlich mit dem Buchstaben i bezeichnen; es ist gleich Null für alle und nur für die zu π senkrechten Geraden. Auf g', der Projektion von g, wollen wir einen positiven Sinn annehmen, und zwar in der Richtung von T nach I'. Tragen wir nun

1) Peschka (*Darstellende Geometrie*, Bd. I, S. 212—272 und die daselbst angeführten Schriften) nennt die so entstehende Methode der darstellenden Geometrie klinographische oder schiefe Projektion.

2) Vgl. Wiener, *Lehrbuch der darst. Geom.*, B. I, S. 98—100.

von T aus auf g' Strecken ab gleich i (Fig. 123), so bilden die Teilpunkte die Neigungsskala der Geraden; sie sind offenbar die Orthogonalprojektionen der Punkte, in denen die betrachtete Gerade die „Hauptebenen“ schneidet, d. h. die zu π im Abstande $\pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$ parallel gelegten Ebenen, daher pflegt man sie mit den Zahlen $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ zu bezeichnen, während den Punkten T und I' die Zahlen 0 und 1 zukommen. Ist α der Winkel zwischen g und π, und hat man, wie vorausgesetzt, $d = 1$ genommen, so ist $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\overline{TI'}}$, wo $\overline{TI'} = i$ ist; tg α heißt die Neigung der Geraden und wird gewöhnlich mit p bezeichnet. Somit ist $i \cdot p = 1$ und diese Beziehung zeigt, daß, wenn eine der Größen i, p gegeben ist, auch die andere bekannt ist.

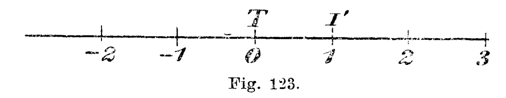


Fig. 123.

Bezeichnen wir in ähnlicher Weise als Intervall einer Ebene $\tau \equiv [ti']$ (die nicht zu π parallel ist) den Abstand j der beiden Geraden t und i', so wird dieser gleich Null sein für alle, und nur für solche Ebenen, die senkrecht zu π sind. Eine beliebige zu t und i' senkrechte Gerade f' schneide diese beiden in den Punkten T, I', dann wird $f \equiv (TI')$ (vgl. Nr. 30) eine Gerade größter Neigung (in bezug auf die feste Ebene π), also eine Fallinie von τ sein. Die Neigungsskala f' dieser Geraden wird j zum Intervall haben und wird auch die Neigungsskala der betrachteten Ebene genannt. Eine Ebene besitzt also unzählig viele, einander kongruente solcher Skalen; aus einer von ihnen gehen die übrigen durch geeignete Verschiebung in einer zu der ersten senkrechten Richtung hervor. Die entsprechenden Punkte der ∞^1 Neigungsskalen einer Ebene $\tau \equiv [ti']$ liegen auf Geraden, die zu t und i' parallel sind (Fig. 124) und die Orthogonalprojektionen von Geraden sind, in denen τ von den Hauptebenen geschnitten wird. — Um die Figuren deutlicher zu machen, so daß man die Neigungsskalen der Ebenen von denen der Geraden unterscheiden kann, pflegt man die ersteren durch Doppellinien zu bezeichnen.

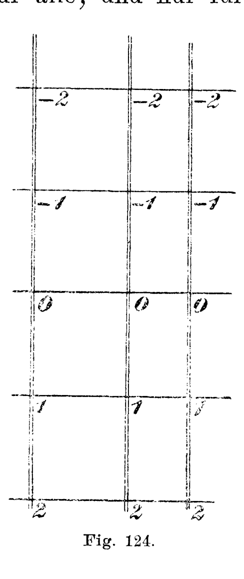


Fig. 124.

Aus dem Begriff des Intervalls j einer Ebene τ ergibt sich leicht, daß, wenn β die Neigung der Ebene τ gegen π ist, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{j}$.

Betrachten wir schließlich einen beliebigen Punkt des Raumes

$M \equiv (TI', m')$ und nennen (in ähnlicher Weise wie wir es auch bei den andern beiden Darstellungsmethoden getan haben) die Zahl m, die seinen Abstand von π mißt (positiv genommen, wenn M auf derselben Seite von π liegt wie ι) seine *Kote*, so haben wir, da wir ja als Einheit den Abstand der beiden Beziehungselemente π und ι gewählt hatten, nach Größe und Vorzeichen die Beziehung

$$m = \frac{\overline{TM'}}{\overline{TI'}}. \tag{1}$$

Dadurch wird, wenn (außer T und I') der Punkt M' gegeben ist, die Kote m bestimmt, und umgekehrt, wenn die Kote m gegeben, so kann man M' und somit auch M finden. Wenn ferner die Zahl m und der Punkt M' gegeben sind, so ist auch M bestimmt, und um seine Darstellung nach der vorigen Methode zu erhalten, müßte man zwei Punkte T und I' betrachten, die mit M' in gerader Linie liegen und der obigen Relation (1) genügen. Dieses System, Punkte des Raumes durch ihre Orthogonalprojektion auf eine feste Ebene π (die man die Grundebene nennt)[1]) und ihre Kote zu bestimmen, erweist sich in der Praxis als recht nützlich, wenn es sich darum handelt, Figuren darzustellen und zu untersuchen, bei denen eine Dimension im Verhältnis zu den beiden anderen sehr klein ist, wie z. B. bei größeren Teilen der Erdoberfläche[2]). Sie wird als die Methode der kotierten Projektionen oder der kotierten Ebenen bezeichnet; von ihr macht man in der Topographie und in der Fortifikationslehre einen ausgedehnten Gebrauch. Wenn man sich ihrer bedient, so will man durch die Schreibweise $M \equiv (M', m)$ also ausdrücken, daß M den Punkt bedeutet, dessen Orthogonalprojektion auf die Grundebene der Punkt M', und dessen Abstand von π die Kote m ist.[3])

95. Die so gemachten Annahmen für die Darstellung von Punkten, Ebenen und Geraden, entheben uns der Betrachtung der zu Anfang eingeführten Ebene ι, indem es genügt, nur die Grundebene zu betrachten und eine Maßeinheit festzulegen. Aus dem Gesagten ergeben sich sogleich folgende Sätze:

1) Diese Ebene nimmt man gewöhnlich als horizontal an, daher werden als Horizontalgeraden einer Ebene ihre Schnitte mit den zur Grundebene parallelen sog. Hauptebenen bezeichnet.

2) Diese Methode der Darstellung kann als gemischte bezeichnet werden, da sie zur Darstellung sowohl Figuren als auch Zahlmaße zugleich verwendet.

3) Verfährt man in gleicher Weise wie bei der Bestimmung des Zentrums bei der Zentralprojektion, so könnte man statt die Zahl m anzugeben, auch einen Kreis um M' als Zentrum beschreiben, in positivem oder negativem Sinne umlaufen, je nachdem M sich auf derselben oder der anderen Seite von π befindet wie ι. Das so sich ergebende System der Darstellung wurde erdacht und untersucht von Fiedler, der es Zyklographie nannte (1882).



1) Alle Punkte, die dieselbe Projektion M' haben, liegen auf der in M' zur Grundebene π errichteten Senkrechten.

2) Alle Punkte von gleicher Kote liegen in einer zur Grundebene parallelen Ebene; z. B. die von der Kote 0 liegen in der Grundebene selbst.

3) Damit zwei Geraden, von denen keine senkrecht zur Bildebene ist, sich schneiden, ist notwendig und hinreichend, daß der Punkt, in dem ihre Projektionen sich schneiden, dieselbe Kote hat, mag er als Projektion eines Punktes der einen oder der anderen Geraden aufgefaßt werden. Wenn dagegen eine der Geraden senkrecht zur Bildebene ist, so genügt für das Schneiden, daß der Punkt in dem sich die eine Gerade projiziert auf der Projektion der andern liegt.

4) Damit zwei Geraden parallel seien, ist notwendig und hinreichend, daß ihre Projektionen es seien, und daß ihre Neigungsskalen dasselbe Intervall und denselben Sinn haben.

Das Merkmal hierfür kann mit dem für den Fall 3) gegebenen in eins zusammengefaßt werden, das den Vorzug hat, auch dann anwendbar zu sein, wenn der Schnitt der Projektionen außerhalb des Zeichenblattes fällt. Betrachten wir nämlich zwei Geraden r, s die in derselben Ebene τ liegen und auf ihnen die Punkte $R_a, S_a; R_b, S_b; \ldots$, die zu zwei dieselben Koten $a, b, \ldots$ haben, so sind die Geraden R_aS_a, $R_bS_b, \ldots$ nichts anderes als die Schnitte der Ebene τ mit den Niveau-Ebenen der Koten $a, b, \ldots$; sie sind also parallel zueinander, und daselbe gilt auch von den Projektionen $R_a'S_a'$, $R_b'S_b' \ldots$ auf die Grundebene. Folglich: **Liegen zwei Geraden, die nicht zur Bildebene senkrecht sind in derselben Ebene, so bilden die Verbindungslinien der Projektionen von Punkten gleicher Koten ein Büschel paralleler Geraden.** Umgekehrt: Wenn letzteres zutrifft, so sind die betreffenden Geraden konkurrent oder parallel, je nachdem die Träger der Neigungsskalen der beiden Geraden konkurrent oder parallel sind.

5) Beachten wir, daß die Neigungsskala einer Ebene, eine ihrer Geraden darstellt, so folgt aus dem vorigen: **Liegt eine Gerade in einer Ebene, so sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden bezüglichen Neigungsskalen einander parallel.** Damit hat man ein Mittel alle Ebenen eines Büschels, oder alle Geraden einer Ebene darzustellen.

6) Damit zwei Ebenen einander parallel seien, ist es notwendig und hinreichend, daß zwei ihrer Geraden größter Neigung (Fallgeraden) gegen die Grundebene parallel zueinander sind; folglich **haben die Neigungsskalen zweier einander paralleler Ebenen als Träger zwei parallele Geraden, haben gleiche Intervalle und gleichen positiven Sinn.**

96. Es sollen nun die Lösungen einiger elementarer, aber häufig vorkommender Aufgaben angegeben werden.



I. Gegeben die Neigungsskala einer Ebene: gesucht die Horizontallinie von gegebener Kote m.

Wir betrachten die Teilpunkte 0 und 1 der gegebenen Skala und nennen sie T und I'. Dann bestimmen wir auf der Skala selbst den Punkt M', so daß $\frac{\overline{TM'}}{\overline{TI'}} = m$; die in M' zu dem Träger der Skala errichtete Senkrechte ist die gesuchte Horizontallinie.

II. Die Kote eines Punktes P zu finden, der in einer gegebenen Ebene liegt, und dessen Projektion P' ist.

Die Bezeichnungen seien wie vorhin; von P' fällen wir das Lot auf den Träger der Skala der Ebene; ist M' der Fußpunkt, so liefert (vgl. die Relation (1) in Nr. 95) $\frac{\overline{TM'}}{\overline{TI'}} = m$ die gesuchte Kote.

III. Durch eine gegebene Gerade eine Ebene von gegebener Neigung β zu legen (Fig. 125).

Da man von der gesuchten Ebene die Neigung β kennt, so kennt man auch ihr Intervall $j = \operatorname{ctg} \beta$. Man greife nun auf der Neigungsskala der gegebenen Geraden zwei aufeinanderfolgende Teilpunkte k und $k+1$ heraus und beschreibe um k mit dem Radius j einen Kreis. Jede der von $k+1$ an ihn gezogenen Tangenten kann als Projektion einer Horizontallinie mit der Kote $k+1$ der gesuchten Ebene aufgefaßt werden, während die zu ihr durch k gezogene Parallele eine solche mit der Kote k darstellt. Nehmen wir ein Paar solcher Parallelen, so wird eine beliebige Senkrechte zu ihnen als Träger einer Neigungsskala der gesuchten Ebene aufgefaßt werden können, und diese Skala ist vollständig bestimmt, da man ja zwei aufeinanderfolgende Teilpunkte kennt, k und $k+1$. Die Lösung ist offenbar nur möglich, wenn das Intervall der Geraden größer ist als $\operatorname{ctg} \beta$.

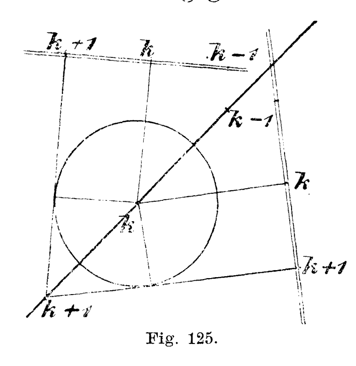


Fig. 125.

IV. In einem Strahlenbüschel das Element von gegebener Neigung α zu finden (Fig. 126).

Das Büschel sei bestimmt durch seine Ebene, deren Neigungsskala gegeben ist, und sein Zentrum O, das durch seine Projektion O' gegeben ist. Das Intervall i der gesuchten Geraden ist bekannt, da ja $i = \operatorname{ctg} \alpha$. Man betrachte nun zwei aufeinanderfolgende Horizontallinien, k und $k+1$, der gegebenen Ebene (Fig. 126) und einen

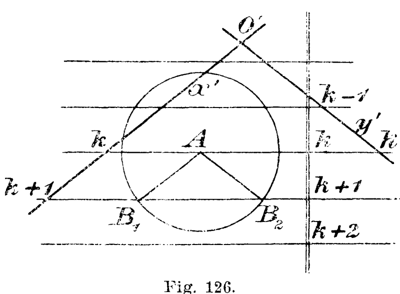


Fig. 126.

beliebigen Punkt A der Projektion der ersteren als Mittelpunkt, um den man mit i als Radius einen Kreis beschreibt; dieser schneidet die Projektion der zweiten in B_1 und B_2. Dann sind die durch O' zu AB_1 und AB_2 gezogenen Parallelen x' und y' die Projektion der beiden Geraden, die die Aufgabe lösen. x' (ebenso y') schneidet die Projektion jener Horizontallinien in den Teilpunkten k und $k+1$ der entsprechenden Skalen, somit ist jene Skala und die Gerade x bestimmt. Damit die Aufgabe möglich sei, muß das Intervall der gegebenen Ebene kleiner als das der gesuchten Geraden sein.

Zweites Kapitel.

Anwendungen auf einige Aufgaben.

a) Probleme der Geometrie der Lage.

97. Wir wollen nun zeigen, in welcher Weise man die Methode der kotierten Ebenen zur Lösung geometrischer Aufgaben verwenden kann; in der Wahl und Anordnung der Aufgaben werden wir uns nach den Gesichtspunkten richten, die wir auch bei dem Studium der beiden früheren Darstellungsmethoden innehielten.

Aufgabe I. Gegeben zwei Punkte: Gesucht ihre Verbindungslinie. Die beiden Punkte seien z. B. $A \equiv (A', 35{,}7)$, $B \equiv (B', 39{,}4)$; die Verbindungslinie bestimmen, heißt deren Neigungsskala finden, welche Operation gemeinhin als Graduation der Geraden benannt wird. Um sie auszuführen, denken wir uns durch den Punkt A in der Ebene, die die Gerade AB orthogonal projiziert, die Horizontale AH gezogen, und nehmen auf BH in entgegengesetztem Sinne die Strecken $HC_1 = 0{,}3$ und $BD_1 = 0{,}4$; C_1 hat demnach als Kote $35{,}7 + 0{,}3 = 36$, während D_1 als solche $39{,}4 - 0{,}4 = 39$ hat. Die durch C_1 und D_1 zu AH gezogenen Parallelen schneiden AB in den Punkten C und D mit der Kote 36 und 39. Die Projektionen dieser Punkte auf die Grundebene C' und D' liegen offenbar auf der Geraden $A'B'$, so daß $C \equiv (C', 36)$, $D \equiv (D', 39)$; teilen wir nun $C'D'$ in drei gleiche Teile durch E' und F', so sind diese Punkte die Projektionen der Punkte E, F der Geraden AB mit den Koten 37, 38. Somit haben wir von der Neigungsskala der Geraden AB vier aufeinanderfolgende Punkte, mit den Koten 36, 37, 38, 39, die mehr als hinreichend sind, alle übrigen Teilpunkte der Skala zu erhalten. — Um nun diese Konstruktion in der Zeichenebene auszuführen, errichten wir im Punkte B' die Senkrechte zu $A'B$ und geben ihr die Länge $B'B = 39{,}4 - 35{,}7 = 3{,}7$, also gleich der Differenz der Koten von

A und B. Dann machen wir (s. Fig. 127) auf der Senkrechten in entgegengesetztem Sinne $B'C_1 = 0{,}3$ und $BD_1 = 0{,}4$; die durch die Endpunkte zu $A'B'$ gezogenen Parallelen treffen $A'B$ in C und D, welche Punkte wir als C' und D' auf $A'B'$ projizieren. $C'D'$ teilen wir in drei gleiche Teile, von denen jeder gleich dem Intervall der gegebenen Geraden ist. Die Skala kann also nach beiden Seiten ins Unendliche weitergeführt werden. Da nun das Intervall der Geraden bekannt ist, so kann man auch sogleich ihre Neigung bestimmen.

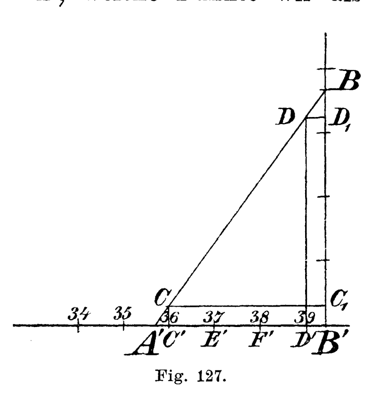


Fig. 127.

Aus dem obigen ergibt sich: **Eine Gerade ist bestimmt, wenn man ihre Projektion auf die Grundebene kennt, die Kote eines ihrer Punkte, das Intervall und den positiven Sinn auf ihr**; mit Hilfe dieser Data kann man nämlich leicht einen zweiten Punkt bestimmen und damit die Neigungsskala herstellen.

Zur Übung: I. Die Neigung und den Spurpunkt einer Geraden zu finden, die durch zwei beliebige ihrer Punkte bestimmt ist. — **II.** Eine Gerade zu graduieren, von der man die Projektion kennt, und die Neigungsskala einer Ebene, die sie enthält.

Ein Spezialfall der vorigen Aufgabe ist der: **Durch einen Punkt zu einer gegebenen Geraden die Parallele zu ziehen.** Um sie zu lösen beachten wir, daß parallele Geraden parallele und direkt gleiche Neigungsskalen haben (s. Nr. 95) und daß, wenn eine Gerade durch einen Punkt geht ihre Projektion die Projektion jenes enthalten muß. Ist also (Fig. 128) $A \equiv (A', 3{,}7)$ jener Punkt, und g durch g' und seine Skala gegeben, so ziehe man durch A' die Parallele x' zu g' und betrachte auf g die Punkte $Q \equiv (Q', 3)$, $R \equiv (R', 3{,}7)$, $S \equiv (S', 4)$; die durch Q' und S' zu $R'A'$ gezogenen Parallelen schneiden x' in den Projektionen der Punkte der gesuchten Geraden x, die die Koten 3 und 4 haben. Dies genügt, die ganze Neigungsskala von x zu konstruieren, und somit ihre Darstellung zu erhalten.

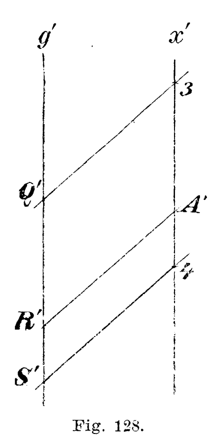


Fig. 128.

98. Aufgabe II. Die Schnittlinie zweier Ebenen zu finden, die beide durch ihre Neigungsskala bestimmt sind. Man betrachte in beiden Ebenen je zwei Horizontale von gleicher ganzzahliger Kote a und b; sie schneiden sich in Punkten A und B der gesuchten Geraden; ihre Projektionen aber in Punkten A' bzw. B', so daß

$A \equiv (A', a)$, $B \equiv (B', b)$. Somit hat man die Projektion und zwei Teilpunkte der Skala für die gesuchte Gerade; diese ist dadurch völlig bestimmt und konstruierbar. Vgl. Fig. 129, wo $a = 3$ und $b = 6$ genommen wurde.

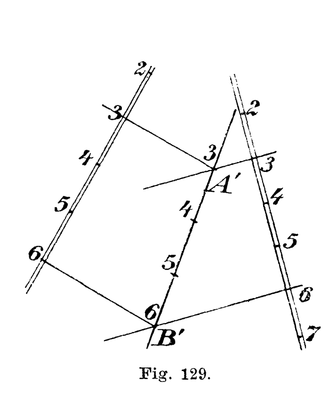


Fig. 129.

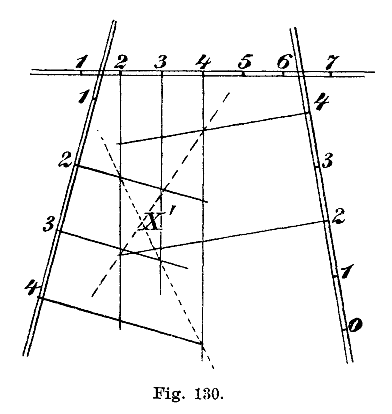


Fig. 130.

Diese Konstruktion wird nicht anwendbar sein, wenn die Träger der Skalen einen sehr kleinen Winkel miteinander bilden, weil dann die Punkte, die die Gerade bestimmen, außerhalb des Zeichenblattes fallen können. In diesem Falle kann man (s. Fig. 130) einen Kunstgriff anwenden, der sich schon bei der Orthogonal- als auch der Zentralprojektion als sehr nützlich erwiesen hat, nämlich, eine Hilfsebene einzuführen. Wir bestimmen dann zunächst die Schnittlinien der Hilfsebene mit den gegebenen Ebenen. Diese treffen sich in einem Punkte X, dessen Projektion X' und Kote x leicht zu finden ist. X' ist nämlich der Schnittpunkt der Projektionen jener Geraden, und fällt X' zwischen die Teilpunkte k und $k + 1$ der betr. Skala, so ist seine Kote x diejenige Zahl, die k als Ganze und als Bruch das Verhältnis der Entfernungen des Punktes X' von den Punkten k und $k + 1$ der Skala hat. Eine zweite Hilfsebene liefert uns einen zweiten Punkt $Y \equiv (Y', y)$ der gesuchten Geraden, und dann kann man die Neigungsskala derselben finden nach der vorigen Aufgabe.

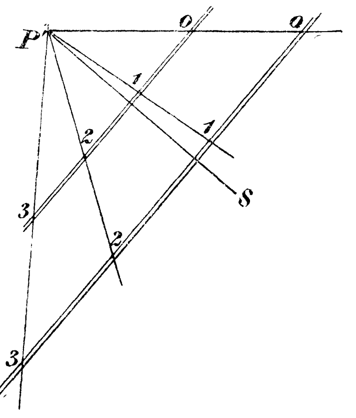


Fig 131.

Dieser Kunstgriff kann auch herbeigezogen werden, wenn die beiden Träger der Skalen parallel zueinander sind, doch ist es in diesem Falle besser, ein anderes Verfahren einzuschlagen. Man beachte zu diesem Zwecke, daß die Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden

Skalen in einen Punkt P' zusammenlaufen müssen. Das von P' auf die beiden Skalen gefällte Lot ist die Projektion einer Horizontalen sowohl der einen als auch der anderen Ebene, sie stellt also die gesuchte Schnittlinie s dar, deren sämtliche Punkte dieselbe Kote haben wie P' (Fig. 131).

Zur Übung: Den Schnitt einer gegebenen Ebene mit einer zur Grundebene parallelen oder zu ihr senkrechten Ebene zu bestimmen.

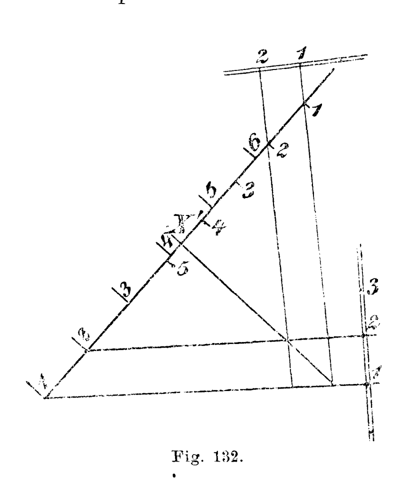


Fig. 132.

Folgesatz. Die angegebene Konstruktion ermöglicht auch **den Punkt zu finden, in dem sich zwei Geraden r, s schneiden, die in derselben Vertikalebene liegen,** und infolgedessen zusammenfallende Projektionen haben. Legt man nämlich (Fig. 132) durch jede der beiden Geraden eine Hilfsebene und bestimmt deren Schnittlinie i, so ist der gesuchte Punkt X derjenige, in welchem i die r (oder s) schneidet. Projektion und Kote desselben können dann leicht wie in Fig. 130 bestimmt werden.

99. Aufgabe III. Die Ebene zu konstruieren, die durch einen Punkt und eine Gerade bestimmt ist. — Der Punkt sei $A \equiv (A', 1{,}75)$, die Gerade die durch die Skala s bestimmte (Fig. 133). Auf ihr betrachten wir den Punkt B, der dieselbe Kote hat wie A. $A'B'$ wird dann die Projektion der Horizontalen der gesuchten Ebene darstellen, die die Kote 1,75 hat. Die Projektionen der übrigen Horizontalen derselben Ebene werden Parallele zu $A'B'$ sein, folglich wird eine beliebige Senkrechte zu diesen als Neigungsskala der gesuchten Ebene fungieren können.

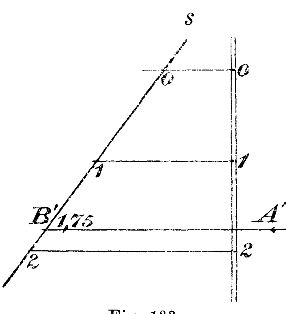


Fig. 133.

Zur Übung: Welche Konstruktion muß an Stelle der vorigen treten, wenn die gegebene Gerade parallel oder senkrecht zur Grundebene läuft?

Besondere Untersuchungen verlangen die Spezialfälle der vorigen Aufgabe, bei denen eines der gegebenen Stücke im Unendlichen liegt.

a) Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, die zu einer gegebenen parallel ist.

Es sei $A \equiv (A', 2{,}25)$ der gegebene Punkt, während die Ebene

durch ihre Neigungsskala s gegeben sei (Fig. 134). Die gesuchte Neigungsskala wird direkt gleich der gegebenen sein und als Träger derselben kann man die durch A' zu s gezogene Parallele nehmen. Betrachtet man nun auf s die Punkte B', C', D' mit den Koten 2, 2,25, 3 und verbindet C' mit A', so liefern die zu $C'A'$ durch B' und D' gezogenen Parallelen die Teilpunkte 2 und 3 auf der gesuchten Skala, die somit völlig bestimmt ist.

Zur Übung: Den Fall zu untersuchen, daß die gegebene Ebene senkrecht oder parallel zur Grundebene liegt.

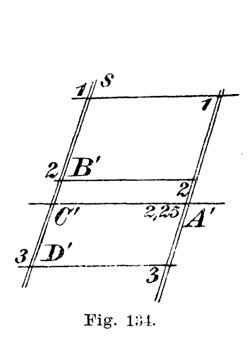


Fig. 134.

Fig. 135.

b) Durch eine Gerade g die zu einer anderen Geraden h parallele Ebene zu legen.

Durch einen beliebigen Punkt (etwa den mit der Kote 0) von g ziehen wir die Parallele p zu h (s. Nr. 97); p und g bestimmen die gesuchte Ebene, deren Horizontallinien sich als die Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden Skalen von g und p projizieren (Fig. 135), und deren Neigungsskala als Senkrechte hierzu sofort gefunden wird.

Zur Übung: **I.** Dieselbe Aufgabe zu lösen unter der Vorraussetzung, daß eine oder beide der gegebenen Geraden parallel oder senkrecht zur Grundebene sind. — **II.** Durch zwei windschiefe Geraden zwei zueinander parallele Ebenen zu legen. — **III.** Die durch drei Punkte bestimmte Ebene zu konstruieren; den Fall zu untersuchen, daß einer oder zwei der gegebenen Punkte im Unendlichen liegen.

Aufgabe IV. Den Schnittpunkt einer Ebene mit einer Geraden zu bestimmen.

Um diese Aufgabe zu lösen, benutzen wir denselben Gedanken, den wir bei der Orthogonalprojektion (in Nr. 24) und bei der Zentralprojektion (in Nr. 67) angewendet haben. Wir legen nämlich durch die gegebene Gerade g eine beliebige Hilfsebene (Fig. 136) und bestimmen deren Schnittlinie s mit der gegebenen Ebene; s und g treffen sich in dem gesuchten Punkte X.

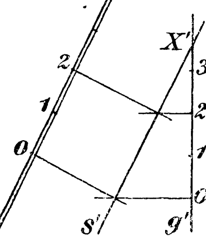


Fig. 136.

Zur Übung: I. Welche Abänderungen erfordert die angegebene Lösung, wenn eines der gegebenen Stücke parallel oder senkrecht zur Grundebene ist? — **II.** Man löse mit der Meth. d. kot. Pr. auch die anderen Aufgaben der Lage, die bei Behandlung der Mongeschen oder der Zentralprojektion aufgestellt oder gelöst wurden.

b) Geraden und Ebenen, die zueinander senkrecht sind.

100. Es sei α eine beliebige Ebene des Raumes und a eine zu ihr senkrechte Gerade, die die Ebenen α und π bzw. in A und B treffe; es sei ferner A' die Orthogonalprojektion von A auf π. Wir ziehen nun die Gerade BA' und bestimmen deren Schnittpunkt C mit a. Die Geraden AC und BC sind beide senkrecht zur Schnittkante απ, somit ist $\sphericalangle ACB = \beta$ der Neigungswinkel der beiden Ebenen α und π, während $\sphericalangle ABC = \alpha$ den Winkel der Geraden a gegen die Bildebene π darstellt. Da nun offenbar

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2},$$

so ist

$$\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = 1,$$

oder anders ausgedrückt

$$\boldsymbol{i \cdot j = 1},$$

wo i und j wie früher die Intervalle der Neigungsskalen der Geraden a und der Ebene α sind. — Wir betrachten ferner auf den beiden Geraden AB und AC die Punkte mit der Kote 1, D und E; es seien D' und E' deren Orthogonalprojektionen, dann ist $BD' = i$ und $CE' = j$; außerdem kann die Gerade BC, welche Träger der Neigungsskala von a ist, auch als Träger der Neigungsskala der Ebene α genommen werden; jedoch ist zu beachten, daß der positive Sinn auf dieser Skala für die Gerade von B nach D' geht, für die Ebene von C nach E', also sind sie entgegengesetzt laufend. Fassen wir diese Bemerkungen zusammen und beachten noch, daß die gemachten Schlüsse augenscheinlich umkehrbar sind, so erhalten wir den folgenden

Satz: Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine Gerade und eine Ebene (die nicht senkrecht zur Grundebene stehen) **zueinander senkrecht seien, sind: 1) Die beiden Neigungsskalen müssen zueinander parallel sein, 2) die beiden Intervalle müssen zueinander reziprok sein, 3) die beiden Skalen müssen entgegengesetzten Sinn haben.**

Dieser Satz ermöglicht es, alle Fragen bei der Methode der kotierten Ebenen zu lösen, in denen zueinander rechtwinklige Geraden und Ebenen vorkommen, wie folgende Beispiele zeigen werden.

101. Aufgabe I. Von einem Punkte auf eine gegebene Ebene (die weder parallel noch senkrecht zur Grundebene) **das Lot zu fällen.**

Der gegebene Punkt sei $M \equiv (M', 7{,}4)$, die Ebene sei durch

ihre Neigungsskala s gegeben. Die Projektion x' des gesuchten Lotes muß eine durch M' zu s gezogene Parallele sein. Wir betrachten nun auf s zwei aufeinander folgende Teilpunkte A und B (Fig. 137), errichten in B eine Senkrechte $BH = 1$ und verbinden H mit A, die zu HA in H errichtete Senkrechte treffe s in C, dann ist $AB \cdot BC = 1$. Da nun $AB = j$ das Intervall der gegebenen Ebene ist, so ist $BC = i$ das der gesuchten Geraden. Wir teilen jetzt BC in zehn gleiche Teile und tragen, da der positive Sinn auf s von rechts nach links geht, von M' aus nach links $^4/_{10}$, nach rechts $^6/_{10}$ auf x' ab, dann erhalten wir die Teilpunkte 7 und 8 auf x', womit x völlig bestimmt ist.

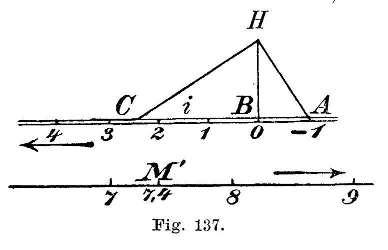


Fig. 137.

Aufgabe II. Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, die senkrecht zu einer Geraden ist, welche weder parallel noch senkrecht zur Grundebene läuft (Fig. 138).

Der Punkt sei $M \equiv (M', 3{,}6)$, die Gerade g gegeben durch ihre Neigungsskala g'. Da der Träger s einer Neigungsskala der gesuchten Ebene parallel zu g' sein muß, so wird das von M' auf g' gefällte Lot p' das Bild der Horizontalen von der Kote 3,6 jener Ebene sein, während man als Sitz ihrer Neigungsskala eine beliebige zu g' gezogene Parallele s nehmen kann; der Schnittpunkt $p's$ bekommt dann die Nummer 3,6. Das Intervall j, das reziprok zum bekannten Intervalle i der Geraden ist, findet man wie bei der obigen Aufgabe. Trägt man nun von sp' $^6/_{10}j$ in dem positiven Sinne von g' ab, so erhält man den Teilpunkt 3, trägt man $^4/_{10}j$ im entgegengesetzten Sinne ab, den Teilpunkt 4 der Neigungsskala der gesuchten Ebene.

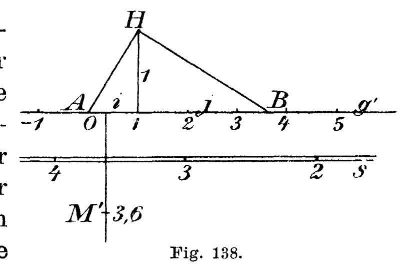


Fig. 138.

Zur Übung: I. Durch eine Gerade die zu einer anderen Ebene, die weder parallel noch senkrecht zur Grundebene ist, senkrechte Ebene zu legen (vgl. Nr. 31). **II.** Von einem Punkte auf eine Gerade (die weder senkrecht noch parallel zur Grundebene) das Lot zu fällen (vgl. Nr. 31). **III.** Das gemeinsame Lot zweier windschiefer Geraden zu finden (vgl. Nr. 32). **IV.** Wie wird bei der Meth. d. kot. Proj. eine Figur dargestellt, die aus einer gegebenen entsteht, wenn man sie einer Translation unterwirft oder einer Rotation um eine vertikale Achse? (Vgl. Nr. 44).

c) Umlegungen.

102. Wir haben in Nr. 37 gesehen, daß der Abstand zweier beliebiger Punkte gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks

ist, dessen eine Kathete der Abstand der Projektionen der Punkte ist, deren andere die Differenz ihrer Koten ist. Um nun den Abstand zweier Punkte $A \equiv (A', a)$, $B \equiv (B', b)$, die nach der Methode der kotierten Ebenen dargestellt sind, zu finden, hat man bloß ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $\overline{A'B'}$ und dem absoluten Werte der Differenz $(a - b)$ zu konstruieren.

Zur Übung: Den Abstand zweier paralleler Geraden oder zweier paralleler Ebenen zu finden, deren Neigungsskalen man kennt.

Sehen wir von dieser, direkt leicht zu lösenden Aufgabe ab, so pflegt man andere metrische Aufgaben auch bei der Methode, die wir jetzt behandeln, ebenso wie bei den beiden früheren, mit Hilfe der Umlegung der betreffenden Ebenen in die Grundebene zu behandeln. Wir haben daher noch einiges über die Beziehungen zu sagen, die zwischen der Projektion $\mathfrak{F}'$ einer Figur $\mathfrak{F}$ in einer Ebene τ und der Figur $(\mathfrak{F})$ bestehen, die entsteht wenn τ um seine Spurlinie mit der Grundebene in die letztere umgelegt wird.

Die Ebene τ möge durch ihre Neigungsskala s gegeben sein (Fig. 139). Wir zeichnen ihre Horizontallinie von der Kote 0, welche eben ihre Spur t mit π sein wird; sie schneide s in T. Ist nun P' die Projektion eines beliebigen Punktes von τ, so können wir seine Kote p leicht bestimmen, indem wir die Kote desjenigen Punktes S suchen, in welchem die Skala s von der durch P' gezogenen Horizontalen geschnitten wird. Wird nun τ in die Grundebene niedergeklappt, so beschreibt P einen Kreis um H, den Fußpunkt des von P' auf t gefällten Lotes und kommt dann in eine Entfernung gleich PH von H zu liegen, die die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist mit den Katheten $\overline{ST} = \overline{P'H}$, und $\overline{SU}$ gleich dem Abstande des Punktes P von der Grundebene. Beschreiben wir daher um H mit dem Radius TU einen Kreis, so schneidet dieser HP' in zwei Punkten, von denen jeder als die Umlegung (P) von P angesehen werden kann. Man kann auch beachten, daß

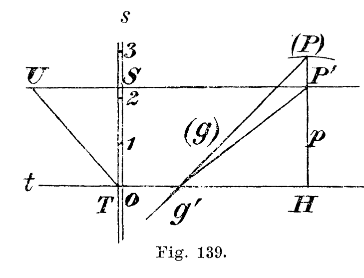


Fig. 139.

$$\frac{P'H}{(P)H} = \frac{P'H}{PH} = \cos PHP' = \cos(\tau\pi).$$

Um die Umlegung (g) einer beliebigen Geraden g der Ebene τ zu finden, hat man bloß die Umlegungen zweier ihrer Punkte aufzusuchen; als den einen dieser Punkte nimmt man zweckmäßig den Spurpunkt der Geraden (d. i. der Punkt $g't$), da dieser mit seiner Projektion und seiner Umlegung zusammenfällt; ist nun P ein beliebiger anderer Punkt von g, so ist (g) die Verbindungslinie von (P) mit $g't$ (siehe

Fig. 139). — Aus diesen Konstruktionen ergibt sich nun (vgl. Nr. 36): **Die Orthogonalprojektion einer beliebigen ebenen Figur auf die Grundebene und ihre Umlegung in diese entsprechen sich in einer Affinität, deren Achse die Spurlinie der Figurebene, deren Strahlen senkrecht zu dieser Achse sind, und deren Affinitätsverhältnis der Kosinus des Neigungswinkels der Figurebene zur Grundebene ist.** Infolge dessen lassen sich auch durch kotierte Ebenen alle Aufgaben, die Umlegung und Wiederaufrichtung ebener Figuren betreffen, auf solche der Affinität zurückführen.

Wenn man eine Figur $\mathfrak{F}$ senkrecht auf eine Ebene τ projiziert und für jeden ihrer Punkte den Abstand von τ aufsucht, und dann τ in die Grundebene π umlegt, so hat man eine Lösung des Problems der Verlegung der Grundebene bei der Methode der kotierten Ebenen.

Zur Übung: I. Den Winkel zweier Geraden, die durch ihre Neigungsskalen gegeben sind, zu bestimmen (vgl. Nr. 38). — **II.** Zwei Ebenen sind durch ihre Skalen gegeben; die von ihnen gebildeten Winkel zu finden (vgl. Nr. 40). — **III.** Den Abstand eines Punktes von einer Ebene oder einer Geraden, die durch die Methode der kotierten Ebenen dargestellt sind, zu bestimmen. — **IV.** Die Neigung einer Geraden gegen eine Ebene zu finden. — **V.** In der Methode der kotierten Ebenen ein regelmäßiges Vieleck darzustellen, von dem man die Ebene und die Projektionen zweier aufeinander folgender Ecken kennt.

d) Konstruktion der Zentralprojektion auf die Grundebene einer Figur, die durch die kotierte Projektion bestimmt ist.

103. Ist eine Figur $\mathfrak{F}$ durch die Methode der kotierten Ebenen bestimmt, und man nimmt dann die Grundebene als eine der Bildebenen für die Mongesche Methode, so ist es leicht, die neue Darstellung zu finden und daraus durch eine Verlegung der Bezugsebene (Nr. 48) zur Abbildung auf zwei beliebige, zueinander senkrechte Ebenen zu gelangen. Soll jedoch von einer Figur $\mathfrak{F}$, die wiederum durch die Methode der kotierten Ebenen bestimmt ist, die Zentralprojektion von einem beliebigen Zentrum C aus auf die Grundebene gefunden werden, so kommt das nachfolgend beschriebene Czubersche Verfahren zur Anwendung.

Das Projektionszentrum sei nach der jetzigen Methode bestimmt als $C \equiv (C', d)$; um eine bestimmte Vorstellung zu haben, wollen wir die Kote d als positiv annehmen.[1]) Nun habe ein beliebiger Punkt M des Raumes die Orthogonalprojektion M' und die Kote m, dagegen die Zentralprojektion M_1, dann liegen offenbar die Punkte C', M', M_1 der Grundebene in gerader Linie, und in absoluten Werten ist

$$\frac{\overline{M_1 M'}}{\overline{M_1 C'}} = \frac{m}{d};$$

1) Die Untersuchung des Falles $d < 0$ wird dem Leser zur Übung überlassen.

überdies, wenn m positiv ist, so liegt M_1 außerhalb der Strecke $M'C'$, wenn es aber negativ ist, innerhalb, und somit besteht die Relation auch dem Vorzeichen nach. Daraus folgt dann: **Der Punkt M_1 ist einer der Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreise, deren einer der Distanzkreis $\varDelta(C', d)$, der andere der mit m um M' beschriebene $\Gamma(M', m)$ ist, und zwar der äußere oder der innere, je nachdem $m \gtrless 0$.** Um die zentralperspektivische Darstellung von M zu vervollständigen, bedarf es noch einer durch M gehenden Geraden: als solche nehmen wir zweckmäßig das von M auf die Bildebene gefällte Lot, das ja M' als Spurpunkt hat und C' als Fluchtpunkt (vgl. Nr. 91, b).

104. Wir betrachten jetzt zwei Punkte $M \equiv (M', m)$, $N \equiv (N', n)$, ihre Verbindungslinie g, sowie deren Spurpunkt T. Durch T geht dann sowohl die Orthogonalprojektion $M'N'$ als auch die Zentralprojektion $M_1 N_1$ von g. Nun ist M_1 einer (aber ein bestimmter) der Ähnlichkeitspunkte der Kreise $\Delta(C', d)$ und $\Gamma(M', m)$, N_1, dagegen einer (auch bestimmter) der Kreise $\Delta(C' d)$ und $\mathrm{K}(N', n)$ folglich ist die Gerade $M_1 N_1$ eine der Ähnlichkeitsachsen der drei Kreise Δ, Γ, K; sie geht daher durch einen der Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreise Γ und K. Nun muß dieser aber auch auf der Zentrale $M'N'$ liegen, also ist dieser Ähnlichkeitspunkt die zu suchende Spur T von g. Bedenkt man nun, daß die vier Ähnlichkeitsachsen dreier Kreise entweder alle drei äußeren Ähnlichkeitspunkte enthalten, oder einen äußeren und zwei innere, so folgt leicht: **Der Spurpunkt der Geraden, die die beiden Punkte $M \equiv (M', m)$ und $N \equiv (N', n)$ verbindet, ist der äußere oder innere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise $\Gamma(M', m)$ und $\mathrm{K}(N', n)$, je nachdem die Koten m und n gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben.**

Den Fluchtpunkt I_1 dieser Geraden kann man auf folgende Weise bestimmen. Wir betrachten auf g die vier Punkte M, N, T und I, den unendlich fernen. Projizieren wir von C aus, so erhalten wir

$$(M_1 N_1 T I_1) = \frac{\overline{MT}}{\overline{NT}};$$

nun ist aber nach Größe und Vorzeichen

$$\frac{\overline{MT}}{\overline{NT}} = \frac{m}{n},$$

und daher

$$(M_1 N_1 T I_1) = \frac{m}{n}.$$

Nun sind die Größen m und n gegeben, die Punkte M_1, N_1, T sind schon konstruiert, also kann man I_1 nach einem bekannten Verfahren aus den Elementen der projektiven Geometrie konstruieren.

Schließlich betrachten wir eine Ebene τ, die durch drei ihrer Punkte $M \equiv (M', m)$, $N \equiv (N', n)$, $P \equiv (P', p)$ bestimmt ist. (Auf dieses System der Data kann man nämlich auch den Fall zurückführen, daß die Ebene durch ihre Neigungsskala gekennzeichnet ist). Um nun ihre Spurlinie t zu finden, genügt die Bemerkung, daß diese auch die Spuren der drei Geraden MN, MP, NP enthalten muß; jede dieser Spuren ist ein (bestimmter) Ähnlichkeitspunkt von je zweien der drei Kreise $\Gamma(M', m)$, $\mathrm{K}(N', n)$, $\Lambda(P', p)$. Hieraus folgt dann, daß die Gerade t eine (bestimmte) von den Ähnlichkeitsachsen der drei Kreise ist; wenn beispielsweise m, n, p alle positiv sind, so ist t diejenige der Achsen, die alle drei äußeren Ähnlichkeitspunkte der drei Kreispaare enthält. — Bestimmt man von der Geraden MN den Fluchtpunkt I_1 (s. oben!) und zieht man durch ihn die Parallele zu t, so bekommt man damit die Fluchtgerade i_1 der Ebene τ; somit hat man für τ die vollständige Darstellung nach der Methode der Zentralprojektion.

Wir können nun noch von einer beliebigen in τ gelegenen Figur $\mathfrak{F}$ die Orthogonalprojektion $\mathfrak{F}'$ und die Zentralprojektion auf die Grundebene betrachten. Da die beiden Projektionen P' und P_1 eines Punktes P von $\mathfrak{F}$ mit C' in gerader Linie liegen, und die beiden Projektionen g' und g_1 einer Geraden g sich auf t schneiden, so entsprechen sich offenbar die beiden Figuren $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}_1$ in einer Homologie, deren Zentrum C_1, deren Achse t ist. Um diese festzulegen, kann ein beliebiges Paar entsprechender Punkte M', M_1 dienen, dessen Konstruktion wir oben dargelegt haben. Somit erkennen wir, daß die Konstruktion von $\mathfrak{F}_1$ sich auf eine Aufgabe aus der ebenen Homologie zurückführen läßt.

Viertes Buch.

Axonometrie.

Erstes Kapitel.

Orthogonale Axonometrie. Grundbegriffe und Grundformeln.

105. Bei manchen Anwendungen der Geometrie, insbesondere bei der Kristallographie und Architektur, kommt es häufig vor, daß man folgende Aufgabe zu lösen hat: **Gegeben die Orthogonalprojektionen einer Figur $\mathfrak{F}$ auf drei Ebenen, die zueinander zu je zweien senkrecht sind, gesucht die** (senkrechte oder schräge) **Parallelprojektion oder die Zentralprojektion auf eine beliebige vierte Ebene.**[1]) Diese Aufgabe ließe sich behandeln nach den Darlegungen des 1. und 2. Buches, indem man diese in geeigneter Weise kombiniert, aber die so sich ergebenden Konstruktionen würden derartig kompliziert werden, daß ihr praktischer Nutzen fast hinfällig würde. Um sie zu vereinfachen, beachten wir zunächst (vgl. Nr. 50), daß, wenn man die Orthogonalprojektionen einer Figur auf drei zueinander senkrechte Ebenen kennt, man auch von jedem Punkte derselben die kartesischen Koordinaten in bezug auf das System kennt, welches die Schnitte jener drei Bildebenen zu Achsen hat; somit kann jene Aufgabe durch folgende andere ersetzt werden:

Aufgabe: Man kennt die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten der einzelnen Punkte einer Figur $\mathfrak{F}$, man suche die Parallelprojektion (von gegebener Richtung) **oder die Zentralprojektion $\mathfrak{F}'$** (von einem gegebenen Zentrum aus) **auf eine gegebene Ebene.**[2])

1) Um sich von der Wichtigkeit dieser Aufgabe einen Begriff zu machen, beachte man, daß die meisten Objekte der Technik und Architektur Flächen besitzen, die zueinander senkrecht sind; um sie also bequem darstellen zu können, wird man am besten diese Flächen den Projektionsebenen parallel legen. Solche Darstellung hat aber im allgemeinen den Übelstand, daß sich diese ganzen Flächen in eine Gerade abbilden; die Bilder sind also wenig ausdrucksvoll. Somit ergibt sich die Notwendigkeit, sie durch eine andere passend gewählte Abbildung zu ergänzen.

2) Wenn es sich um Parallelprojektion handelt, so hängt die Gestaltung der Figur $\mathfrak{F}'$ offenbar nur von der Stellung der Projektionsebene ab, man kann sie daher beispielsweise durch den Koordinatenanfang legen.

Den Inbegriff aller der Sätze, die sich auf diese Aufgabe beziehen, nennen wir Axonometrie, im speziellen, orthogonale, schräge, oder zentrale, je nachdem die gesuchte Projektion ein Lotbild, Schrägbild, oder Schaubild werden soll.[1])

In allen Fällen wollen wir mit OX, OY, OZ die drei Achsen des üblichen kartesischen Koordinatensystems bezeichnen. Die Ebene, auf der die axonometrische Projektion ausgeführt werden soll, wollen wir die Bildebene (oder Tafel) nennen; ihre Schnitte mit den drei Achsen, die wir im allgemeinen in endlicher Entfernung denken, heißen die axonometrischen Spurpunkte und sollen mit den Buchstaben T_x, T_y, T_z bezeichnet werden. Auch wollen wir annehmen, daß auf den Achsen der Sinn von O nach T_x, T_y, T_z der positive sein soll. Ist nun O' die (orthogonale, schräge oder zentrale) Projektion des Punktes O auf die Bildebene, so sind die Geraden $O'T_x$, $O'T_y$, $O'T_z$ die Projektionen der Geraden OX, OY, OZ, und heißen die axonometrischen Achsen; auch auf ihnen nehmen wir einen positiven Sinn an, und zwar in der Richtung von O' nach T_x, T_y, T_z.

Setzen wir nun

$$\left.\begin{aligned} \overline{OT_x} = p, \quad \overline{OT_y} = q, \quad \overline{OT_z} = r, \\ \overline{T_yT_z} = a, \quad \overline{T_zT_x} = b, \quad \overline{T_xT_y} = c, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

so haben wir offenbar

$$\left.\begin{aligned} a^2 = q^2 + r^2, \quad b^2 = r^2 + p^2, \quad c^2 = p^2 + q^2, \\ \text{folglich ist} \qquad b^2 + c^2 > a^2, \quad c^2 + a^2 > b^2, \quad a^2 + b^2 > c^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Aus jeder dieser Beziehungen folgt: **Das Dreieck der axonometrischen Spurpunkte ist immer spitzwinklig.**

106. Wir nehmen jetzt den Fall, daß es sich um orthogonale Axonometrie handelt, und also O' die Orthogonalprojektion des Anfangspunktes O auf die Bildebene sei. Es seien dann ferner (siehe Fig. 140) P, Q, R die Punkte, in denen die Geraden $O'T_x$, $O'T_y$, $O'T_z$ die Geraden T_yT_z, T_zT_x, T_xT_y treffen. Da nun OZ senkrecht zur Ebene XOY ist, so ist (Nr. 30) auch ihre Orthogonalprojektion auf die Tafel, $T_zO'R$ senkrecht zu

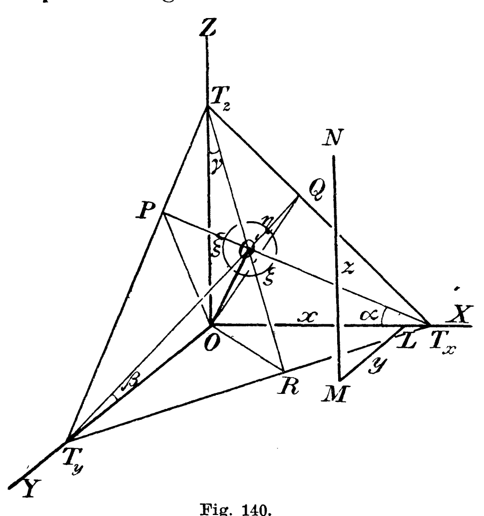


Fig. 140.

1) Offenbar ist die orthogonale Axonometrie ein Spezialfall der schrägen,

deren Spurlinie $T_x T_y$, mit anderen Worten: diese Gerade ist eine Höhe des Dreiecks $T_x T_y T_z$, ebenso auch die beiden anderen Geraden $T_x O' P$ und $T_y O' Q$. Folglich: **Die axonometrische Projektion des Koordinatenanfangs fällt mit dem Höhenpunkte des Dreiecks der axonometrischen Spurpunkte zusammen.** Da nun dieses Dreieck spitzwinklig ist, so **fällt O' immer innerhalb desselben.**

Wir bezeichnen jetzt mit α, β, γ die spitzen Winkel, die die drei Koordinatachsen mit der Bildebene bilden; da nun die Geraden $T_x P$, $T_y Q$, $T_z R$ die Orthogonalprojektionen der Achsen auf die Tafel sind, so ist offenbar

$$\sphericalangle O T_x O' = \alpha, \quad \sphericalangle O T_y O' = \beta, \quad \sphericalangle O T_z O' = \gamma. \tag{3}$$

Setzen wir nun

$$\cos\alpha = \lambda, \quad \cos\beta = \mu, \quad \cos\gamma = \nu, \tag{4}$$

so sind λ, μ, ν drei positive Zahlen und kleiner als 1, die den Namen Verkürzungszahlen tragen. Ist nun e die Maßeinheit, und bezeichnen wir mit l, m, n die Projektionen der auf den drei Koordinatenachsen gelegenen Einheit e auf die Bildebene, so wird

$$l = e \cdot \cos\alpha, \quad m = e \cdot \cos\beta, \quad n = e \cdot \cos\gamma,$$

und infolge dessen

$$\lambda = \frac{l}{e}, \quad \mu = \frac{m}{e}, \quad \gamma = \frac{n}{e}. \tag{5}$$

Tragen wir nun auf der Geraden $O' T_x$ von O' aus Strecken gleich l nach beiden Seiten hin ab, so erhalten wir die erste axonometrische Skala; O ist ihr Anfangspunkt, l das Intervall, und die Richtung von O' nach T_x die positive. In ähnlicher Weise bekommen wir die zweite und dritte axonometrische Skala auf den beiden anderen Achsen.

107. Aus den Gleichungen (2) folgt:

$$p = \sqrt{\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}}, \quad q = \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}}, \quad r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}.$$

Setzt man nun die beiden Ausdrücke für das Volumen des Tetraeders $O T_x T_y T_z$, dessen Höhe OO' wir mit d bezeichnen wollen, einander gleich, so erhält man

$$\tfrac{1}{6} p \cdot q \cdot r = \tfrac{1}{3} d \cdot \Delta T_x T_y T_z,$$

folglich ist

$$d = \sqrt{\frac{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{2(2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4)}}; \tag{6}$$

---

und diese der zentralen, daher würde es vom wissenschaftlichen Standpunkte gewiß zweckmäßig sein, von dieser letzteren auszugehen; vom pädagogischen jedoch, um vom Einfacheren zum Komplizierteren überzugehen, nach unserer Meinung besser sein, den umgekehrten Weg einzuschlagen.

außerdem liefert uns das rechtwinklige Dreieck $OO'T_x$:

$$\sin\alpha = \frac{d}{p},$$

folglich wird

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{d^2}{p^2},$$

und zufolge der obigen Werte von d und p

$$\cos\alpha = \lambda = \sqrt{\frac{2a^2(-a^2+b^2+c^2)}{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}}.$$

Ähnliche Ausdrücke bekommt man für $\cos\beta = \mu$, $\cos\gamma = \nu$ und dies zeigt uns: **Ist beliebig das Dreieck der axonometrischen Spurpunkte gegeben** (orthogonale Axonometrie vorausgesetzt), **so sind damit die Winkel α, β, γ und somit die Verkürzungszahlen λ, μ, ν gegeben, ebenso die Größen l, m, n, wenn man die Einheit e kennt.** — Dasselbe Resultat erhält man auch auf einem anderen, mehr geometrischen Wege, der zu gleicher Zeit auch eine Konstruktion der Winkel α, β, γ abgibt. Beachten wir nämlich, daß die Dreiecke T_xOP, T_yOQ, T_zOR bei O rechtwinklig sind, und daß OO' deren gemeinsame Höhe ist, so haben wir

$$\overline{OO'}^2 = \overline{T_xO'}\cdot\overline{O'P} = \overline{T_yO'}\cdot\overline{O'Q} = \overline{T_zO'}\cdot\overline{O'R}.$$

Diese Beziehungen beweisen, daß, wenn das Dreieck $T_xT_yT_z$ (und damit auch sein Höhenpunkt O') gegeben ist, die Strecke OO' damit bestimmt ist. Um sie zu konstruieren, beschreiben wir über der Strecke T_xP (Fig. 141) einen Halbkreis, dieser schneidet die in O' auf T_xP errichtete Senkrechte in $(O)_1$; verbinden wir diesen Punkt mit T_x und P, so haben wir damit offenbar die Umlegung des Dreiecks T_xOP. Somit ist Winkel $(O)_1T_xO' = \alpha$, also α und $\cos\alpha = \lambda$ sind bestimmt. Tragen wir nun auf $(O)_1T_x$ von $(O)_1$ aus die Strecke $e = (O)_1A$ ab und projizieren A in D auf $O'P$, so ist $O'D = l$. Ähnlich findet man β, μ, m und γ, ν, n.

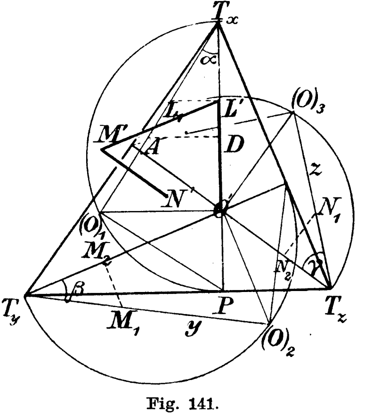


Fig. 141.

Zur Übung: Der Kreis Γ_x über dem Durchmesser T_yT_z enthält die Punkte Q und R; er schneide T_xP in P_1 und P_2; Γ_y, Q_1, Q_2 und Γ_z, R_1R_2 mögen analoge Bedeutung haben. Nun gehören Q_1, Q_2, R_1, R_2 einem Kreise Δ_x an mit dem Zentrum T_x, und dieser schneidet (in ähnlicher Weise auch die Kreise Δ_y, Δ_z) den um O' mit dem Radius d beschriebenen Kreis in diametral gegenüberliegenden Punkten.[1])

1) A. Weiler, *Neue Behandlung der Parallelprojektion und der Axonometrie* (Leipzig, 1896), S. 50ff.

Sind dieselben Stücke gegeben, wie oben, so kann man direkt in der Bildebene **die axonometrische Projektion eines Punktes zeichnen, dessen kartesische Koordinaten** in bezug auf die Achsen OX, OY, OZ **gegeben sind.** — Es sei nämlich $N(x, y, z)$ ein beliebiger Punkt des Raumes; fällen wir von N das Lot MN auf die Ebene XOY und von M das Lot ML auf OX, so ist

$$OL = x, \quad LM = y, \quad MN = z.$$

Es soll nun gezeigt werden, wie man die Projektion der gebrochenen Linie $OLMN$ konstruieren kann. $\overline{OL}$ projiziert sich auf die Bildebene in eine Strecke $O'L'$, deren Länge gleich $\overline{OL} \cdot \cos\alpha = \lambda x$ ist; man kann sie konstruieren, indem man auf $T_x(O)_1$ die Strecke $(O)_1 L_1 = |x|$ nach Größe und Richtung abträgt und dann L_1 als L' auf $T_x O'$ projiziert; ist x also negativ, so kommt L' auf der negativen Seite von O' zu liegen, jedenfalls ist L' eindeutig bestimmt und leicht zu konstruieren. — Die Strecke LM ist parallel zu OY, daher wird ihre Projektion parallel zu $O'T_y$ sein, und ihre Länge wird $\overline{LM} \cdot \cos\beta = \mu \cdot y$, die ähnlich wie $O'L'$ als $L'M'$ konstruiert werden kann, und in derselben Richtung wie $O'T_y$ verläuft, wenn y positiv ist, in entgegengesetzter aber, wenn y negativ ist. — Schließlich ist MN parallel zu OZ, $M'N'$ also zu $O'T_z$, und hat die Länge $\overline{MN} \cdot \cos\gamma = \nu \cdot z$. Über ihre Konstruktion und Richtung gilt das analoge wie eben gesagt.

Diese Konstruktion möge die **Fundamentalkonstruktion der orthogonalen Axonometrie** heißen. Sie ist in Fig. 141 ausgeführt für positive x, y, z; die drei Umlegungen von O sind durch $(O)_1 (O)_2 (O)_3$ bezeichnet, es ist $(O)_1 L_1 = x$, $(O)_2 M_1 = y$, $(O)_3 N_1 = z$; usw.

Bemerkung: Ist der Punkt N gegeben, so ist seine axonometrische Projektion N' eindeutig bestimmt; jedoch ist N nicht bekannt, wenn man N' auf der Bildebene hat, jedoch wohl, wenn man den Zug $O'L'M'N'$ kennt, da man dann leicht x, y, z berechnen kann. Auf diese Bemerkung werden wir später (Nr. 116) zurückkommen.

Anwendung: Man nehme in der Tafel als Achsen eines kartesischen Systems die Geraden $O'T_x$ und $O'T_y$, sind dann x' und y' die Koordinaten von N' und ξ, η, ζ die Winkel zwischen $O'T_x, O'T_y, O'T_z$, und projiziert man den Linienzug $O'L'M'N'$ auf $O'T_y$ parallel zu $O'T_y$, auf $Q'T_y$ parallel zu $O'T_x$, so bekommt man folgende Beziehungen:

$$x' = x\cos\alpha + z\cos\gamma\,\frac{\sin\xi}{\sin\zeta}, \quad y' = y\cos\beta + z\cos\gamma\,\frac{\sin\eta}{\sin\zeta},$$

welche die Koordinaten x', y' mittels x, y, z geben.

Analoge Ausdrücke erhält man, wenn als Achsen $O'T_y$ und $O'T_z$ oder $O'T_x$ und $O'T_z$ genommen werden.

Zur Übung: Die axonometrische Projektion des Parallelepipeds zu finden, das als Flächen die Ebenen

$$\begin{matrix} x = 3 \\ x = 7 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} y = 2{,}5 \\ y = 80 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} z = 3{,}75 \\ z = 50 \end{matrix}$$

hat, wenn das axonometrische Dreieck gegeben ist.

108. Zwischen den Größen α, β, γ; λ, μ, ν; l, m, n; e bestehen häufig verwendete Beziehungen, die wir ıfstellen wollen. Die Winkel, die die Gerade OO' mit den Achsen OX, OY, OZ bildet, sind offenbar gleich $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \beta$, $\frac{\pi}{2} - \gamma$; folglich ist h einem bekannten Satze (vgl. Nr. 39b)

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = 1,$$

d. i.

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1,$$

oder besser

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2. \tag{7}$$

Erinnern wir uns nun der Gleichung (4), so können wir auch schreiben

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 2 \tag{7'}$$

und sagen: **Die Summe der Quadrate der Verkürzungszahlen ist gleich 2.**

Wegen der Beziehung (5) ist (7′) auch gleichwertig mit folgender

$$l^2 + m^2 + n^2 = 2e^2. \tag{7''}$$

Da nun $\lambda = \cos\alpha < 1$, so haben wir zufolge (7)

$$\cos^2\beta + \cos^2\gamma > 1 \tag{*}$$

oder

$$\cos^2\beta > \sin^2\gamma, \quad \text{oder} \quad \cos\beta > \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right),$$

da es sich um spitze Winkel handelt; hieraus und aus zwei analogen Ungleichungen folgt dann

$$\beta + \gamma < \frac{\pi}{2}, \quad \gamma + \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Da nun $1 > \cos^2\alpha$, so liefert uns die Ungleichung (*)

$$\cos^2\beta + \cos^2\gamma > \cos^2\alpha$$

und zwei analoge. Aus diesen und aus (4) folgt

$$\mu^2 + \nu^2 > \lambda^2, \quad \nu^2 + \lambda^2 > \mu^2, \quad \lambda^2 + \mu^2 > \nu^2. \tag{9}$$

In Worten: **Die Summe der Quadrate zweier Verkürzungs-**

zahlen ist immer größer als das der dritten. Man beachte auch, daß wegen (5) die (9) auch folgende Gestalt erhalten kann

$$l^2 < m^2 + n^2, \quad m^2 < n^2 + l^2, \quad n^2 < l^2 + m^2. \tag{9'}$$

Die Gleichung (7′) zeigt uns: **Wenn zwei der drei Größen λ, μ, ν gegeben sind,** indem beide kleiner als 1 sein müssen, und überdies derart, daß die Summe ihrer Quadrate größer als 1 ist, **so ist damit die dritte bestimmt.** Dieselben Größen sind auch bestimmt, wenn man drei positive Zahlen p, q, r kennt, mit denen sie proportional sind; wegen (7′) hat man nämlich

$$\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q} = \frac{\nu}{r} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

Ferner ist zu beachten, daß, wenn man die drei Strecken l, m, n kennt, die der Bedingung (9′) entsprechen, die anderen betrachteten Konstanten damit bestimmt sind. Es liefert uns nämlich (7″)

$$e = \sqrt{\frac{l^2 + m^2 + n^2}{2}};$$

infolge dessen

$$\lambda = \cos\alpha = \frac{l}{e} = \sqrt{\frac{2l^2}{l^2+m^2+n^2}}, \quad \mu = \cos\beta = \frac{m}{e} = \sqrt{\frac{2m^2}{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\nu = \cos\gamma = \frac{n}{e} = \sqrt{\frac{2n^2}{l^2+m^2+n^2}}.$$

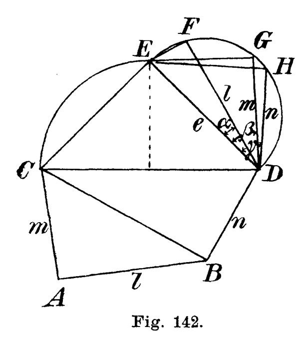


Fig. 142.

Da nun zufolge der Annahme (g'), $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ alle < 1 sich ergeben, so sind α, β, γ reell. — Diese arithmetische Bestimmung der Winkel α, β, γ kann durch folgende geometrische ersetzt werden: Man konstruiere (Fig. 142) das rechtwinklige Dreieck ABC mit den Katheten $AB = l$, $AC = m$, dann ist $BC = \sqrt{l^2 + m^2}$; in B errichte man zu CB die Senkrechte $BD = n$, dann wird $CD = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$. Über CD als Hypotenuse errichtet man nun ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck CED, dann ist

$$DE = \sqrt{\frac{l^2 + m^2 + n^2}{2}} = e.$$

Über ED als Durchmesser beschreibt man nun einen Halbkreis und trägt in ihn die Sehnen $DF = l$, $DG = m$, $DH = n$ ein, was infolge der Annahme, daß alle kleiner wie $DE = e$ seien, ja möglich ist. Jetzt ist, weil $\cos\alpha = \frac{l}{e}$, usw. $\sphericalangle EDF = \alpha$, $EDG = \beta$, $EDH = \gamma$.

109. Vorteilhaft ist auch die Betrachtung der um O' liegenden stumpfen Winkel $T_y O' T_z = \xi$, $T_z O' T_x = \eta$, $T_x O' T_y = \zeta$, die zusammen einen vollen Winkel ausmachen, so daß also

$$\xi + \eta + \zeta = 2\pi. \tag{10}$$

Mit den Winkeln α, β, γ sind sie durch wichtige Beziehungen verknüpft. Um diese zu finden, beachten wir, daß ξ der Außenwinkel des rechtwinkligen Dreiecks $T_y R O'$ ist, weshalb

$$\xi = \frac{\pi}{2} + \sphericalangle O' T_y R,$$

daher ist

$$\cos \xi = -\sin(O' T_y R) = -\frac{\overline{O'R}}{\overline{O'T_y}}.$$

Nun ist auch $T_z O R$ ein rechtwinkliges Dreieck; OO' ist seine Höhe und sowohl $\sphericalangle O T_z O'$ als auch $\sphericalangle O' O R$ sind beide gleich γ, daher ist

$$\overline{O'R} = \overline{OO'} \cdot \operatorname{tg} \gamma, \quad \overline{O'T_z} = \overline{OO'} \cdot \operatorname{tg} \gamma;$$

ebenso ergibt sich

$$\overline{O'P} = \overline{OO'} \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad \overline{O'T_x} = \overline{OO'} \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$
$$\overline{O'Q} = \overline{OO'} \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad \overline{O'T_y} = \overline{OO'} \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Setzt man die Werte für $\overline{O'R}$ und $\overline{O'T_y}$, die sich hieraus ergeben, in die Formel für $\cos \xi$ ein, und bildet zwei weitere durch zyklische Vertauschung, so bekommt man:

$$\cos \xi = -\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma, \quad \cos \eta = -\operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad \cos \zeta = -\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta. \tag{11}$$

Diese liefern uns ξ, η, ζ als Funktionen von α, β, γ; lösen wir sie nach $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$, $\operatorname{tg} \gamma$ auf, so erhalten wir:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{-\frac{\cos \eta \cdot \cos \zeta}{\cos \xi}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \sqrt{-\frac{\cos \xi \cdot \cos \zeta}{\cos \eta}}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \sqrt{-\frac{\cos \xi \cdot \cos \eta}{\cos \zeta}} \tag{12}$$

wo die Wurzeln mit + Zeichen genommen werden müssen, da α, β, γ spitze Winkel sind; diese Formeln liefern uns α, β, γ als Funktionen von ξ, η, ζ.

Aus diesen Fundamentalgleichungen lassen sich weitere ableiten: Da

$$\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{-\cos \eta \cdot \cos \zeta}{\cos \xi - \cos \eta \cdot \cos \zeta} = \frac{\cos \eta \cdot \cos \zeta}{\cos \eta \cdot \cos \zeta - \cos[2\pi - (\eta + \zeta)]}$$
$$= \frac{\cos \eta \cdot \cos \zeta}{\sin \eta \cdot \sin \zeta},$$

so ergeben sich folgende drei Formeln:

$$\sin^2 \alpha = \cot \eta \cdot \cot \zeta, \quad \sin^2 \beta = \cot \zeta \cdot \cot \xi, \quad \sin^2 \gamma = \cot \xi \cdot \cot \eta. \tag{13}$$



Da nun

$$a = T_y T_z = \sqrt{\overline{OT_y}^2 + \overline{OT_z}^2} = \sqrt{\left(\frac{OO'}{\sin\beta}\right)^2 + \left(\frac{OO'}{\sin\gamma}\right)^2} = d\sqrt{\frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}},$$

so ergibt sich aus (13)

$$a = d\sqrt{\operatorname{tg}\xi\,(\operatorname{tg}\eta + \operatorname{tg}\zeta)} = d\sqrt{\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\cdot\frac{\sin(\eta+\zeta)}{\cos\eta\cdot\cos\zeta}};$$

wir können also schreiben:

$$a = \frac{d\cdot\sin\xi}{\sqrt{-\cos\xi\cdot\cos\eta\cdot\cos\zeta}},\ b = \frac{d\cdot\sin\eta}{\sqrt{-\cos\xi\cdot\cos\eta\cdot\cos\zeta}},\ c = \frac{d\cdot\sin\zeta}{\sqrt{-\cos\xi\cdot\cos\eta\cdot\cos\zeta}}. \quad (14)$$

Nun folgt aus (11) und (13)

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\xi = \operatorname{tg}\beta\cdot\cos\eta = \operatorname{tg}\gamma\cdot\cos\zeta,$$
$$\sin^2\alpha\cdot\cot\xi = \sin^2\beta\cdot\cot\eta = \sin^2\gamma\cdot\cot\zeta.$$

Dividieren wir diese beiden Gleichungen durcheinander, nachdem wir die erste ins Quadrat erhoben, die zweite durch 2 geteilt haben, so erhalten wir

$$\frac{\sin 2\xi}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin 2\eta}{\cos^2\beta} = \frac{\sin 2\zeta}{\cos^2\gamma}. \quad (15)$$

Infolge von (7) nimmt der gemeinsame Wert dieser drei Brüche den Wert an

$$\frac{\sin 2\xi + \sin 2\eta + \sin 2\zeta}{2} = 2\sin\xi\cdot\sin\eta\cdot\sin\zeta,$$

folglich ist

$$\cos^2\alpha = \frac{\sin 2\xi}{2\sin\xi\cdot\sin\eta\cdot\sin\zeta},\quad \cos^2\beta = \frac{\sin 2\eta}{2\sin\xi\cdot\sin\eta\cdot\sin\zeta},$$
$$\cos^2\gamma = \frac{\sin 2\zeta}{2\sin\xi\cdot\sin\eta\cdot\sin\zeta}. \quad (16)$$

Die Gleichungen (13) zeigen uns, daß, wenn $\beta = \gamma$ wird, auch $\eta = \zeta$; offenbar wird dann auch $\mu = \nu$ und $m = n$. Die Gl. (12) dagegen lassen uns erkennen, wenn umgekehrt $\eta = \zeta$, dann $\beta = \gamma$ wird, daher $\mu = \nu$ und $m = n$. **Sind also zwei beliebige von den Elementen eines der Tripel**

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\quad \lambda,\ \mu,\ \nu;\quad \xi,\ \eta,\ \zeta;\quad l,\ m,\ n$$

einander gleich, so hat dies auch für die zwei entsprechenden der anderen Tripel statt. In diesem Falle nennt man die Axonometrie **monodimetrisch.**[1]) Sind aber alle drei Größen eines Tripels einander gleich, so sind es auch die Elemente der anderen drei Tripel und die Axonometrie heißt **isometrisch;** in solchem Falle ist

1) Die häufigste Annahme ist, daß $\lambda:\mu:\nu = 2:1:2$ oder $3:1:3$.

$$\xi = \eta = \zeta = \frac{2\pi}{3} = 120^0,$$

und

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad (\alpha = 35^0\ 16').$$

Im allgemeinen Falle, wo diese Größen verschieden sind, heißt die Axonometrie **anisometrisch.**[1])

110. Aus Gl. (15) kann man einen bemerkenswerten Satz ableiten, indem man sie mit der bekannten Eigenschaft eines Dreiecks kombiniert, nämlich daß „die Höhen die Winkel des Höhenfußpunktsdreiecks halbieren." Ziehen wir in dem Dreiecke $T_x T_y T_z$ die Geraden QR, RP, PQ, so ist $RT_y PO'$ ein Kreisviereck, und daher ist

$$\sphericalangle RT_y O' = RPO' = \tfrac{1}{2} RPQ.$$

Weil nun, wie wir sahen,

$$\xi = \frac{\pi}{2} + \sphericalangle RT_y O',$$

so is

$$\xi = \frac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2} \sphericalangle RPQ,$$

demnach

$$\sphericalangle RPQ = 2\xi - \pi,$$

folglich

$$\sin(RPQ) = -\sin 2\xi;$$

ebenso ist

$$\sin PQR = -\sin 2\eta, \quad \sin QRP = -\sin 2\zeta.$$

Nun ist

$$\frac{\overline{QR}}{\sin OPR} = \frac{\overline{RP}}{\sin RQP} = \frac{\overline{PQ}}{\sin PRQ},$$

und daher

$$\frac{\overline{QR}}{\sin 2\xi} = \frac{\overline{RP}}{\sin 2\eta} = \frac{\overline{PQ}}{\sin 2\zeta}.$$

Aus dieser Gleichung und (15) ergibt sich

$$\frac{\overline{QR}}{\cos^2\alpha} = \frac{\overline{RP}}{\cos^2\beta} = \frac{\overline{PQ}}{\cos^2\gamma} \tag{17}$$

oder auch

$$\frac{\overline{QR}}{\lambda^2} = \frac{\overline{RP}}{\mu^2} = \frac{\overline{PQ}}{\nu^2}. \tag{17'}$$

Dies ist die gesuchte Beziehung, und in Worten ausgedrückt liefert sie uns den folgenden

---

1) Am meisten gebraucht werden die Systeme, in denen die Verhältnisse $\lambda : \mu : \nu$ die Werte $5:4:6$, $9:5:10$, $7:6:8$ haben.

Satz von Schlömilch: Die Seiten des Höhenfußpunktsdreiecks des Dreiecks der axonometrischen Spurpunkte sind proportional den Quadraten der Verkürzungszahlen.

Die zwischen den sechs Konstanten α, β, γ und ξ, η, ζ gefundenen Beziehungen führen uns zu einem weiteren, eleganten und nützlichen Satze. Um diesen zu erhalten, betrachten wir eine Ellipse mit den Halbachsen a und b; a_1 und b_1 seien zwei konjugierte Halbmesser, die miteinander den stumpfen Winkel ω bilden. Wenden wir die bekannten Sätze des Apollonius an, so haben wir:

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2, \quad a_1 \cdot b_1 \cdot \sin\omega = ab.$$

Die erste Gleichung zeigt uns, daß die Summe der drei Größen

$$\frac{a_1}{a}, \quad \frac{b_1}{a}, \quad \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

gleich 2 ist, also kann man setzen

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{a}, \quad \cos\beta = \frac{b_1}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Nennen wir nun (Fig. 143) die Winkel, die jene beiden Halbmesser mit der großen Achse der Ellipse bilden φ und ψ, so haben wir, indem wir bekannte Formeln anwenden

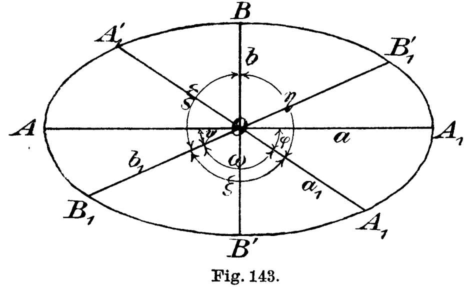


Fig. 143.

$$\sin\varphi = \frac{b\sqrt{a^2 - a_1^2}}{a_1\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

$$\sin\psi = \frac{b\sqrt{a^2 - b_1^2}}{b_1\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Die obigen Werte von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ zeigen uns aber, daß

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{a^2 - a_1^2}}{a_1}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{a^2 - b_1^2}}{b_1}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

und, wenn wir Gl. (11) anwenden

$$\cos\xi = -\frac{b\sqrt{a^2 - b_1^2}}{b_1\sqrt{a^2 - b^2}} = -\sin\psi, \quad \cos\eta = -\frac{b\sqrt{a^2 - a_1^2}}{a_1\sqrt{a^2 - b^2}} = -\sin\varphi$$

Es ergibt sich daraus

$$\xi = \frac{\pi}{2} + \psi, \quad \eta = \frac{\pi}{2} + \varphi. \qquad (*)$$

Schließlich ist

$$\cos\zeta = -\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = -\frac{\sqrt{(a^2 - a_1^2)(a^2 - b_1^2)}}{a_1 b_1},$$

daher

$$\sin\zeta = \frac{\sqrt{a^2(a_1^{\,2}+b_1^{\,2})-a^4}}{a_1 b_1} = \frac{\sqrt{a^2(a^2+b^2)-a^4}}{a_1 b_1} = \frac{a b}{a_1 b_1} = \sin\omega,$$

weshalb

$$\zeta = \omega \qquad (*)$$

sein muß.

Die mit (*) bezeichneten Beziehungen sind es, die wir nachweisen wollten; sie können zusammengefaßt werden in den folgenden

Satz von Schwarz: Zwei beliebige konjugierte Durchmesser und die kleine Achse einer Ellipse können nach Richtung als die Orthogonalprojektionen dreier aufeinander senkrecht stehender Geraden angesehen werden; nimmt man diese als kartesische Achsen und die Ebene der Ellipse als Bildebene, so stellen die Verhältnisse der beiden gewählten Halbmesser zur großen Halbachse und der Fokalabstand der Ellipse die drei entsprechenden Verkürzungszahlen dar.

111. Schließlich noch eine Folgerung aus den aufgestellten Formeln! Es seien, wie vorhin, T_xP, T_yQ, T_zR die Höhen, O' der Höhenpunkt des axonometrischen Dreiecks. In O' errichten wir (Fig. 144) zu $O'T_x$ und $O'T_y$ die Senkrechten $O'R_x$ bzw. $O'R_y$, so daß also O' der Schnitt der beiden über T_xR_x und T_yR_y beschriebenen Halbkreise ist, deren Mittelpunkte C_x, C_y, deren Radien r_x''', r_y''' bzw. sein mögen. Wir suchen Ausdrücke für diese Radien. Zu dem Zwecke beachten wir, daß

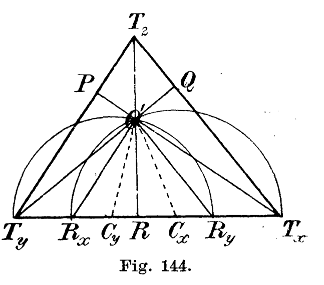


Fig. 144.

$$\overline{T_yO'}^2 = \overline{T_yR}\cdot\overline{T_yR_y}.$$

Da aber

$$\xi = \frac{\pi}{2} + \sphericalangle RT_yO',$$

so ist

$$\sin\xi = \cos RT_yO' = \frac{\overline{T_yR}}{\overline{T_yO'}},$$

daher liefert uns die vorige Gleichung

$$\overline{T_yR_y} = \frac{T_yO'}{\sin\xi},$$

und daher (s. Nr. 109)

$$\overline{T_yR_y} = \frac{d}{\operatorname{tg}\beta\sin\xi},$$

oder auch wegen Gl. (12)

$$\overline{T_yR_y} = \frac{d\cos\eta}{\sin\xi\sqrt{-\cos\xi\cdot\cos\eta\cdot\cos\zeta}}.$$

Zufolge (14) ist

$$c = \frac{d \sin\zeta}{\sqrt{-\cos\xi \cdot \cos\eta \cdot \cos\zeta}},$$

und daher

$$\frac{\overline{T_y R_y}}{c} = \frac{\cos\eta}{\sin\xi \cdot \sin\zeta} = \frac{\sin 2\eta}{2\sin\xi \cdot \sin\eta \cdot \sin\zeta}.$$

Wenden wir nun Gl. (16) an und beachten, daß $\overline{T_y R_y} = 2 r_y'''$, so bekommen wir:

$$r_y''' = \tfrac{1}{2} c \cos^2\beta = \frac{\mu^2}{c^2} c.$$

In ähnlicher Weise findet man

$$r_x''' = \tfrac{1}{2} c \cos^2\alpha = \frac{\lambda^2}{2} c.$$

Zwei andere entsprechende Kreise hat man auf der Seite $T_z T_x$, zwei weitere über $T_z T_y$; sind r_z'', r_x'' und r_z', r_y' deren Radien, so haben wir insgesamt folgende Beziehungen

$$\left.\begin{array}{lll} r_y' = \frac{\mu^2}{2} a & r_z'' = \frac{\nu^2}{2} b & r_x''' = \frac{\lambda^2}{2} c \\ r_z' = \frac{\nu^2}{2} a & r_x'' = \frac{\lambda^2}{2} b & r_z''' = \frac{\mu^2}{2} c \end{array}\right\} . \tag{18}$$

Die so erhaltenen sechs Kreise heißen **Verkürzungskreise**[1]), und wir werden binnen kurzem ihre Nützlichkeit erkennen. Inzwischen sei noch bemerkt, daß

$$\overline{C_x''' C_y} = \overline{T_x T_y} - (r_x''' + r_y''') = c - \frac{\lambda^2}{2} c - \frac{\mu^2}{2} c = \frac{c}{2}(2 - \lambda^2 - \mu^2);$$

und daher ist wegen (7')

$$\overline{C_x C_y} = \frac{c}{2} \nu$$

Diese Beziehung im Verein mit der schon für $r_x''' = \frac{c}{2}\lambda^2$ und $r_y''' = \frac{c}{2}\mu^2$ gefundenen zeigt uns: **Das Dreieck $O'C_yC_x$ hat** (ebenso wie PQR) **die Eigenschaft, daß seine Seiten proportional den Verkürzungszahlen sind**; deshalb nennt man es ein **Verkürzungsdreieck**; zu jeder Seite des axonometrischen Dreiecks gehört ein solches.

Zweites Kapitel.

Orthogonale Axonometrie: Die bezüglichen Aufgaben.

112. Als Fundamentalaufgaben der orthogonalen Axonometrie pflegt man die beiden folgenden, von denen jede die Umkehrung der anderen ist, zu betrachten:

1) J. Tesař, *Der orthogonalaxonometrische Verkürzungskreis* (Wiener Sitzungsber. Bd. LXXXI, 1880. S. 453—478).



I. Gegeben die axonometrischen Projektionen der Koordinatenachsen, gesucht die Verkürzungszahlen (mit anderen Worten: gegeben die Winkel ξ, η, ζ, gesucht α, β, γ).

II. Gegeben die Verkürzungszahlen (d. h. zwei derselben), **man soll die gegenseitigen Neigungen der Projektionen der Koordinatenachsen bestimmen** (d. h. gegeben die Winkel α, β, γ, gesucht ξ, η, ζ). Arithmetisch sind diese Aufgaben alsbald gelöst, die erste durch unsere Gleichung (12), die zweite durch (11) in Nr. 109. Es sollen hier die geometrischen Lösungen dargelegt werden, denen man in der Regel den Vorzug gibt.

I. Fundamentalaufgabe. Es seien die drei von einem Punkte O' ausgehenden Strahlen $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ gegeben, die der Bedingung genügen, daß die drei Winkel zwischen ihnen alle stumpf sind. Auf der Verlängerung von $X'O'$ greifen wir einen beliebigen Punkt P heraus (Fig. 145) und errichten in ihm die Senkrechte, die die beiden andern Strahlen in T_y und T_z trifft. Von T_y fällen wir auf T_zO' das Lot T_yR, welches verlängert $O'X'$ in T_x trifft. Ziehen wir nun T_xT_z, so wird diese Gerade senkrecht zu T_yO' sein. Nunmehr können wir $T_xT_yT_z$ als ein axonometrisches Dreieck auffassen und nach dem in Nr. 107 angeführten Verfahren die Winkel α, β, γ bestimmen, deren Kosinus die gesuchten Zahlen λ, μ, ν sind. Verschiebt man P auf der Geraden $O'X'$, so ändert sich das Dreieck $T_xT_yT_z$, jedoch so, daß es immer sich selbst ähnlich bleibt, daher ist die Größe von α, β, γ, sowie die Zahlen λ, μ, ν von der Wahl des Punktes P unabhängig, sie hat keinen Einfluß auf die Lage der Bildebene, sondern nur auf ihren Abstand von O.

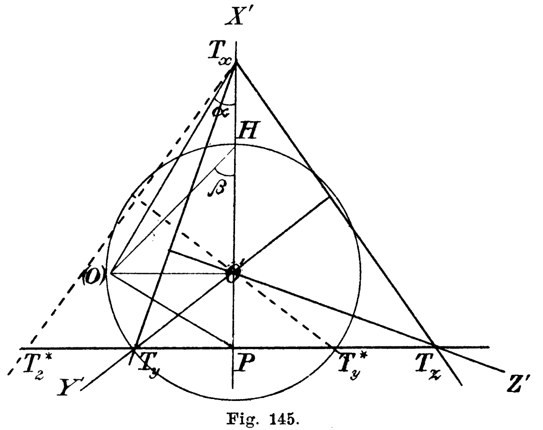


Fig. 145.

113. II. Fundamentalaufgabe. Um die Verkürzungszahlen zu bestimmen, genügt es zwei derselben anzugeben, da die Summe ihrer Quadrate gleich 2 sein muß. Es seien z. B. λ und μ gegeben, beide positiv und < 1 jedoch so, daß $\lambda^2 + \mu^2 > 1$; die spitzen Winkel die λ und μ zum Kosinus haben seien α und β. Wir ziehen nun (Fig. 145) den Strahl $O'X'$ beliebig und nehmen auch die Strecke $OO' = d$ als beliebig an. In der Zeichenebene nehmen wir daher $O'(O) = d$ senkrecht zu $O'X'$; durch (O) ziehen wir nun die Gerade, die mit $O'X'$

den Winkel α bildet, und $O'X'$ in T_x schneidet. Die zu $(O)T_x$ in (O) errichtete Senkrechte schneide $O'X'$ in P; durch P ziehen wir die Parallele p zu $O'(O)$. Nun bestimmen wir auf $O'X'$ den Punkt H derart, daß $\sphericalangle (O)HO' = \beta$. Der mit $O'H$ um O' beschriebene Kreis schneide p in T_y und T_y^*. Es wird dann behauptet, daß man $O'T_y$ (bzw. $O'T_y^*$) als Gerade $O'Y'$ nehmen kann, und das von O' auf T_xT_y gefällte Lot als $O'Z'$. Dies ergibt sich daraus, daß, wenn man auf das vorliegende Dreieck $T_xT_yT_z$ (oder $T_xT_y^*T_z^*$) die in Nr. 107 angeführte Konstruktion der Verkürzungszahlen anwendet, man eben die gegebenen Stücke λ, μ bekommt. Damit die angegebene Lösung ein reelles Resultat ergebe, muß die Gerade p den um O' mit $O'H$ beschriebenen Kreis schneiden, d. h. $\overline{O'H} > \overline{O'P}$ oder $d \cot \beta > d \operatorname{tg} \alpha$, oder auch

$$\frac{\cos^2 \beta}{1 - \cos^2 \beta} > \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha},$$

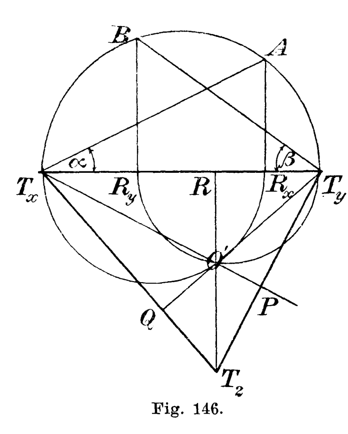


Fig. 146.

oder $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta > 1$, d. i. $\lambda^2 + \mu^2 > 1$, wie es oben auch vorausgesetzt war.

Dieselbe Aufgabe läßt sich auch mit Hilfe der Verkürzungskreise lösen. Wir nehmen nämlich (s. Fig. 146) die Punkte T_x, T_y beliebig an und beschreiben über T_xT_y einen Halbkreis, ziehen in diesem die Sehnen T_xA, T_yB derart, daß $\sphericalangle AT_xT_y = \alpha$, $BT_yT = \beta$ wird; dann loten wir die Punkte A, B als R_x, R_y auf $T_xT_y (= c)$. Dann ist

$$\overline{T_xR_x} = \overline{T_xT_y} \cdot \cos^2 \alpha = c\lambda^2, \quad \overline{T_yR_y} = \overline{T_xT_y} \cos^2 \beta = c\mu^2.$$

Alsdann sind die Kreise mit den Durchmessern T_xR_x und T_yR_y die Verkürzungskreise für die Seite T_xT_y des axonometrischen Dreiecks; sie schneiden sich in einem Punkte O', der immer reell ist, wenn $\lambda^2 + \mu^2 > 1$. Die von T_x bzw. T_y auf die Geraden T_yO' bzw. T_xO' gefällten Lote (mit den Fußpunkten P und Q) schneiden sich in einem Punkte T_z des von O' auf T_xT_y gefällten Lotes $O'R$. Nun kann man offenbar die drei Strahlen $O'T_x$, $O'T_y$, $O'T_z$ als die Projektionen der axonometrischen Achsen auffassen.

114. Es sollen nun zwei andere, den eben gelösten verwandte Aufgaben behandelt werden.

I. Die axonometrischen Projektionen der Koordinatenachsen zu bestimmen, wenn drei Zahlen p, q, r gegeben sind, die den Verkürzungszahlen proportional und von der Beschaffenheit sind, daß das Quadrat einer jeden kleiner ist, als die Summe der Quadrate der beiden anderen.

1. Lösung: Da

$$\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q} = \frac{\nu}{r} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

so kann man auch die Verkürzungszahlen selbst als bekannt ansehen, und somit ist vorliegende Aufgabe auf die II. Fundamentalaufgabe sogleich zurückgeführt.

2. Lösung: Man kann hier den Schlömilchschen Satz (Nr. 110) anwenden. Über einer beliebigen Strecke AB, die aber größer ist als die in einer gewählten Einheit ausgedrückten Strecken p, q, r beschreibe man einen Halbkreis und ziehe in diesem die Sehnen AC, AD, AE von der Länge p, q, r. Jetzt loten wir die Punkte C, D, E als C_1, D_1, E_1 auf AB, dann ist

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC_1}, \quad \overline{AD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD_1}, \quad \overline{AE}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AE_1},$$

folglich ist

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AD_1}}{\overline{AD}^2} = \frac{\overline{AE_1}}{\overline{AE}^2},$$

d. h.

$$\frac{\overline{AC_1}}{p^2} = \frac{\overline{AD_1}}{q^2} = \frac{\overline{AE_1}}{r^2}. \quad \dots\dots\dots \quad (*)$$

Da nun der Voraussetzung zufolge

$$p^2 < q^2 + r^2, \quad q^2 < r^2 + p^2, \quad r^2 < p^2 + q^2,$$

so ist auch

$$\overline{AC_1} < \overline{AD_1} + \overline{AE_1}, \quad \overline{AD_1} < \overline{AE_1} + \overline{AC_1}, \quad \overline{AE_1} < \overline{AC_1} + \overline{AD_1},$$

folglich kann man immer ein Dreieck PQR konstruieren, das $\overline{AC_1}$, $\overline{AD_1}$, $\overline{AE_1}$ als Seiten hat. Schneiden sich nun die Halbierungslinien seiner Innenwinkel in O', so können die Geraden $O'P$, $O'Q$, $O'R$ als die gesuchten Projektionen der Koordinatenachsen angesehen werden und die in P, Q, R auf ihnen errichteten Senkrechten bilden das axonometrische Dreieck $T_x T_y T_z$. Nennen wir nämlich die Verkürzungszahlen für dieses Dreieck λ, μ, ν, so haben wir nach dem Schlömilchschen Satze

$$\frac{\overline{QR}}{\lambda^2} = \frac{\overline{RP}}{\mu^2} = \frac{\overline{PQ}}{\nu^2},$$

oder wegen der Konstruktion

$$\frac{\overline{AC_1}}{\lambda^2} = \frac{\overline{AD_1}}{\mu^2} = \frac{\overline{AE_1}}{\nu^2},$$

oder wegen (*)

$$\frac{\lambda^2}{p^2} = \frac{\mu^2}{q^2} = \frac{\nu^2}{r^2}$$

und deshalb, da es sich nur um positive Größen handelt,

$$\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q} = \frac{\nu}{r},$$

wie wir haben wollten.

3. Lösung: Statt uns auf den Schlömilchschen Satz zu stützen, können wir auch die Verkürzungskreise zu Hilfe nehmen. Wir konstruieren nämlich wie oben (vgl. Fig. 144) die Strecken AC_1, AD_1, AE_1 und dann ein Dreieck $O'C_xC_y$, derart, daß $\overline{C_xC_y} = AE_1$, $O'C_x = AC_1$, $O'C_y = AD_1$. Dann verlängern wir die C_xC_y nach beiden Seiten und tragen auf der Verlängerung $C_yT_y = \overline{C_yO'}$ und $\overline{C_xT_x} = \overline{C_xO'}$ ab. Die Geraden $O'T_x$ und $O'T_y$ können dann als die Projektionen $O'X'$, $O'Y'$ aufgefaßt werden; $O'Z'$ ist dann das von O' auf T_xT_y gefällte Lot.

II. Gegeben einer der Winkel α, β, γ, und einer der stumpfen Winkel ξ, η, ζ, gesucht die vier anderen.

Zu unterscheiden sind hier die Fälle, daß die beiden gegebenen Winkel sich einander entsprechen in den beiden Gruppen $\alpha\beta\gamma$, $\xi\eta\zeta$, oder daß dies nicht der Fall ist.

a) Gegeben seien z. B. α und ξ. Über der beliebig angenommenen Strecke T_xT_y beschreiben wir einen Halbkreis und ziehen in ihm die Sehne T_xA, die mit T_xT_y den Winkel α bildet, dann loten wir A als R_x auf T_yT_x. Der Kreis über R_xT_x als Durchmesser ist der Verkürzungskreis und enthält daher den Punkt O'. Ziehen wir jetzt durch T_y die Gerade, die mit T_yT_x den Winkel $\xi - \frac{\pi}{2}$ bildet, so schneidet sie jenen Kreis in zwei Punkten, von denen jeder als O' angesehen werden kann. $O'T_x$, $O'T_y$, und das von O' auf T_xT_y gefällte Lot können dann als axonometrische Projektionen der kartesischen Achsen genommen werden.

b) Sind hingegen z. B. α und ζ gegeben, so wiederhole man zunächst die vorige Konstruktion des Verkürzungskreises, alsdann beschreibe man über T_xT_y den Kreisbogen, der den Winkel ζ als Peripheriewinkel faßt. Er schneidet den Verkürzungskreis in einem Punkte O'. Die weitere Konstruktion verläuft wie unter a).

Zur Übung: Welchen Bedingungen müssen α und ξ, oder α und ζ gehorchen, damit die letzte Aufgabe möglich ist?

Drittes Kapitel.

Die orthogonale Axonometrie als Darstellungsmethode.

115. Wir nehmen die zu Anfang dieses Buches gemachten Betrachtungen wieder auf, ändern aber die dort benutzten Bezeichnungen, um sie dem hier ins Auge gefaßten Zwecke besser anzupassen. Eine

Figur $\mathfrak{F}$ ist bestimmt, wenn man von jedem ihrer Punkte die Koordinaten in Bezug auf ein System von drei rechtwinklig zueinander stehenden Achsen Ox, Oy, Oz kennt. Wir wollen nun mit $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$, $\mathfrak{F}'''$ die orthogonalen Projektionen von $\mathfrak{F}$ auf die yz, zx, xy-Ebenen bezeichnen, während wir mit $\mathfrak{F}^*$, $\mathfrak{F}'^*$, $\mathfrak{F}''^*$, $\mathfrak{F}'''^*$ die orthogonal-axonometrischen Projektionen der Figuren $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$, $\mathfrak{F}'''$ auf die Bildebene $\pi \equiv T_x T_y T_z$ bezeichnen wollen. Demnach würde O^* die axonometrische Projektion des Anfangspunktes sein, O^*x^*, O^*y^*, O^*z^* die der Koordinatenachsen, also die axonometrischen Achsen.

Es sei nun P ein beliebiger Punkt des Raumes, dann sind P', P'', P''' die Fußpunkte der von P bzw. auf die yz, zx, xy-Ebene gefällten Lote; mit P_x, P_y, P_z sollen die übrigen Ecken des „projizierenden Quaders" bezeichnet werden, das O und P als gegenüberliegende Ecken besitzt, und dessen Kanten parallel den Koordinatenachsen laufen; die genannten Ecken liegen also auf Ox, Oy, Oz.

Eine beliebige Gerade g hat außer der axonometrischen Projektion g^* auf der Bildebene, noch die drei Orthogonalprojektionen g', g'', g''' auf die Koordinatenebenen, sie hat ferner in diesen Ebenen drei Spurpunkte G_1, G_2, G_3 (den ersten, zweiten, dritten) und einen vierten G, den axonometrischen Spurpunkt, nämlich den Punkt, in dem g die Bildebene schneidet.

Eine beliebige Ebene σ schließlich hat außer den Spurlinien s_1, s_2, s_3 mit den Koordinatenebenen noch eine vierte s, mit der Bildebene, die axonometrische Spur. Nennen wir die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen S_x, S_y, S_z, so sind die Dreiecke $T_x T_y T_z$ und $S_x S_y S_z$ ersichtlich perspektiv mit O als Zentrum und s als Perspektivitätsachse.

116. Die Ecken des einen beliebigen Punkt P „projizierenden Quaders" projizieren sich in acht Punkten auf die Bildebene. Einer von ihnen ist O^*, drei andere P_x^*, P_y^*, P_z^* liegen auf den axonometrischen Achsen O^*x^*, O^*y^*, O^*z^* (Fig. 147) und können, wenn man die Koordinaten von P und die Verkürzungszahlen kennt, durch die Fundamentalkonstruktion (Nr. 107) erhalten werden. Die drei anderen P'^*, P''^*, P'''^* erhält man, indem man berücksichtigt, daß die Figuren $O^*P_y^*P'^*P_z^*$, $O^*P_x^*P''^*P_z^*$, $O^*P_y^*P'''^*P_x^*$ Parallelogramme sind; schließlich erhält man den Punkt P^*, wenn man beachtet, daß er mit einem der drei Punkte P'^*, P''^*, P'''^* verbunden, ein Parallelogramm liefert, wie z. B. $P'^*P_y^*P'''^*P^*$.

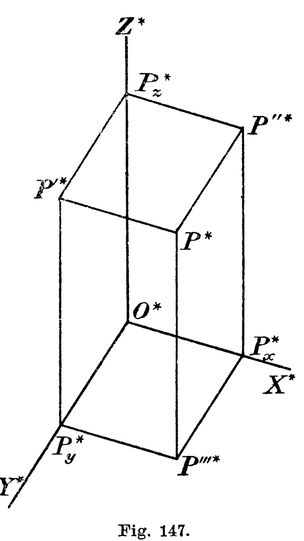


Fig. 147.

Umgekehrt, sind (außer den axonometrischen Achsen) zwei der Punkte P^*, P'^*, P''^*, P'''^*, die der unten angegebenen Bedingung entsprechen, gegeben, so sind damit die beiden anderen bestimmt, desgleichen die Punkte P_x^*, P_y^*, P_z^*, also sind auch nach Größe und Vorzeichen die Koordinaten von P, und damit P selbst bestimmt. Nehmen wir z. B. P^* und P'^* als gegeben an, so muß ihre Verbindungslinie parallel zu O^*x^* sein; nehmen wir dagegen P''^* und P'''^*, so müssen die durch P''^* zu O^*z^* und die durch P'''^* zu O^*y^* gezogenen Parallelen sich auf O^*x^* schneiden.

Wenn wir nun unter Voraussetzung solcher Bedingungen schreiben $P \equiv (P^*, P'^*)$ oder $P \equiv (P''^*, P'''^*)$, so wollen wir damit ausdrücken, daß jene beiden Punkte notwendig und hinreichend sind, um den Punkt P des Raumes zu bestimmen.

Wenn insbesondere P in einer der Koordinatenebenen, z. B. in der yz-Ebene liegt, so fällt er mit P' zusammen, daher fällt auch P^* mit P'^* zusammen, während P''^* auf O^*z^* und P'''^* auf O^*y^* zu liegen kommt. Ähnliche Verhältnisse treten ein, wenn P in einer der anderen Koordinatenebenen liegt. — Infolgedessen fallen, wenn P auf der Achse Ox liegt, P'' und P''' mit P zusammen, während P' auf den Anfangspunkt O fällt, daher vereinigen sich P^*, P''^*, P'''^* in einen einzigen Punkt von O^*x^*, und P'^* fällt auf O^*.

Aus diesen Bemerkungen lassen sich nützliche Folgerungen für die Spurpunkte einer Geraden g ziehen. Nämlich bei der oben gemachten Definition der Bezeichnungen ergibt sich nun

$$G_1 \equiv gg', \quad G_2 \equiv gg'', \quad G_3 \equiv gg''';$$

somit ist die Bedingung, daß g parallel zu einer der Koordinatenebenen sei, die daß g', g'' oder g''' es sei. Da die Spurpunkte in den Koordinatenebenen selbst liegen, so erkennt man, daß

$$\begin{array}{llll} G_1' \equiv G_1, & G_1'' \text{ liegt auf } Oz, & G_1''' \text{ liegt auf } Oy; \\ G_2'' \equiv G_2, & G_2''' \quad " \quad " \ Ox, & G_2' \quad " \quad " \ Oz; \\ G_3''' \equiv G_3, & G_3' \quad " \quad " \ Oy, & G_3'' \quad " \quad " \ Ox. \end{array}$$

Da nun die Inzidenz und der Parallelismus, bei der Orthogonalprojektion auf eine beliebige Ebene erhalten bleiben, so kann man bei allen diesen Schlüssen einen Stern an die auftretenden Buchstaben setzen.

117. Aus der in der vor. Nr. behandelten Darstellung der Punkte des Raumes kann man eine solche für die der Geraden ableiten. Eine Gerade g kann man nämlich darstellen, indem man zwei beliebige Geraden g^*, g'^* der Bildebene angibt, deren erste die axonometrische Projektion, deren zweite die der Orthogonalprojektion g' auf die Koordinatenebene (hier die yz-Ebene) ist; wir schreiben also $g \equiv (g^*, g'^*)$.



g ist dann die Schnittlinie der in g^* zur Bildebene senkrecht errichteten Ebene, mit der Ebene, die senkrecht auf der yz-Ebene errichtet wird, und zwar in der Geraden, in welcher die in g'^* zur Bildebene senkrecht errichtete Ebene, die yz-Ebene schneidet; g ist also eindeutig bestimmt.

Irgend eine zu O^*x^* parallele Gerade der Bildebene schneidet g^* und g'^* in den Punkten P^* und P'^*, die zusammen einen Punkt P der Geraden g darstellen; man kann dann (s. die vorige Nr.) P''^* und P'''^* finden. Eine zweite Gerade parallel zu O^*y^* liefert zwei weitere Punkte Q^*, Q''^*, aus denen man Q'^* und Q'''^* ableiten kann; die Geraden $P''^*Q''^*$ und $P'''^*Q'''^*$ sind dann g''^* und g'''^*. Übrigens kann man diese Geraden auch auf einem anderen Wege erhalten, den wir jetzt darlegen wollen, da er uns auch zu weiteren Ergebnissen führt, und auf den zu Ende der vorigen Nr. gemachten Bemerkungen beruht.

Die Gerade g'^* schneidet die Geraden g^*, O^*z^*, O^*y^* bzw. in $G_1^* \equiv G_1'^*$, $G_2'^*$, $G_3'^*$ (Fig. 148). Projizieren wir G_1^* auf O^*y^* parallel zu O^*z^* und auf O^*z^* parallel zu O^*y^*, so erhalten wir bzw. die Punkte $G_1'''^*$ und $G_1''^*$. Die zu O^*x^* durch $G_2'^*$ und $G_3'^*$ gezogenen Parallelen schneiden g^* in den Punkten $G_2^* \equiv G_2''^*$ und $G_3^* \equiv G_3'''^*$. Die durch $G_2''^*$ zu O^*z^* gezogene Parallele schneidet O^*x^* in $G_2'''^*$, während die durch $G_3'''^*$ zu O^*y^* gezogene O^*x^* in $G_1'''^*$ trifft. Alsdann gehören die drei Punkte $G_1''^*$, $G_2''^*$, $G_3''^*$ der Geraden G''^* an, während $G_1'''^*$, $G_2'''^*$, $G_3'''^*$ auf g'''^* liegen. Diese Geraden sind also vollauf bestimmt, und alsbald lassen sich dann auch die Spuren der betrachteten Geraden mit den Koordinatenachsen finden. Aus dieser Darstellungsmethode ergibt sich, daß, wenn die beiden Geraden g^* und g'^* einander parallel sind, die ursprüngliche Gerade g zur yz-Ebene parallel sein muß, wenn sie dagegen zusammenfallen, daß g dann in dieser Ebene liegt. Ferner ergibt sich: Damit die beiden Geraden $g \equiv (g^*, g'^*)$, $h \equiv (h^*, h'^*)$ sich schneiden, ist notwendig und hinreichend, daß die Verbindungslinie der Punkte g^*h^* und $g'^*h'^*$ parallel zu O^*x^* sei; im speziellen trifft dies zu, wenn g^* und h^*, oder g'^* und h'^* zusammenfallen. Wenn ferner g^* parallel zu h^* und h'^* zu g'^*, dann sind die ursprünglichen Geraden g und h einander parallel.

Fig. 148.

118. Um eine beliebige Ebene σ durch unsere jetzige Methode darzustellen, können zwei in ihr liegende Geraden dienen, die nach der eben angegebenen Weise bestimmt sind. Als solche kann man irgend zwei von den drei Spurlinien s_1, s_2, s_3 mit den Koordinatebenen wählen. Es seien also z. B. die beiden Geraden s_2^*, s_3^* gegeben, die sich natürlich in einem Punkte S_x^* von O^*x^* treffen müssen, dann sind diese die Bilder der beiden Geraden s_2 der xz-Ebene und s_3 der xy-Ebene, die sich auf Ox treffen und dadurch die Ebene σ festlegen. Wir wollen dies durch die Schreibweise $\sigma \equiv [s_2^*, s_3^*]$ ausdrücken, wobei inbegriffen ist, daß s_2^* und s_3^* sich auf O^*x^* treffen. Ist nun ferner (Fig. 149) $S_y \equiv s_3 \cdot O^*y^*$, $S_z \equiv s_2 \cdot O^*z^*$, so ist $S_y^*S_z^* \equiv s_1^*$ das Bild der dritten Spur von σ. Was nun schließlich die axonometrische Spur $s \equiv s^*$ anlangt, so ist diese offenbar die Homologieachse der beiden Dreiecke $S_xS_yS_z$, $T_xT_yT_z$ (mit O^* als Zentrum der Homologie). Diese Methode der Darstellung ist auch anwendbar in dem Falle, daß σ parallel zu einer der Koordinatebenen oder Achsen ist; möge der Leser zu seiner Übung die Modifikationen angeben, die die allgemeine Methode in diesem Falle erfährt. In dem Falle, daß σ durch den Anfangspunkt O geht, gehen auch s_1, s_2, s_3 durch O, folglich gehen s_1^*, s_2^*, s_3^* alle durch O^* und schneiden die Geraden T_yT_z, T_zT_x, T_xT_y in drei Punkten einer und derselben Geraden, die die axonometrische Spur der Ebene σ selbst ist; daraus ergibt sich ein einfaches Verfahren, aus zweien der Geraden s_1^*, s_2^*, s_3^* (die durch O^* gehen) die dritte abzuleiten.

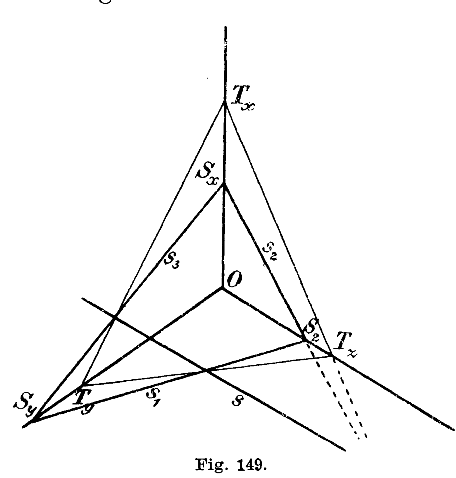


Fig. 149.

Auf jeder beliebigen Ebene des Raumes gibt es drei Systeme von bemerkenswerten Geraden, nämlich die zu den drei Projektionsebenen parallel laufenden, und die wir bei der Mongeschen Methode (Nr. 16) als Hauptlinien bezeichnet haben. Eine zur yz-Ebene parallele Hauptlinie h projiziert sich in eine zu s_1 parallele Gerade h', in eine zu Ox parallele als h'', eine zu Oy parallele als h'''. Daher sind h'^*, h''^*, h'''^* Geraden, die bzw. zu s_1^*, O^*x^*, Oz^* parallel sind. Analoge Eigenschaften haben die zur zx- und xy-Ebene parallelen Hauptlinien.

Die Betrachtung der Hauptlinien führt uns zu einer leichten Lösung der Aufgabe: **Die Darstellung eines Punktes M zu vervoll-**

ständigen, der durch eine ihn enthaltende Ebene $\sigma \equiv (s_2^*, s_3^*)$ und eine seiner Projektionen, etwa M'^* gegeben ist. Man betrachte zu dem Zwecke diejenige Hauptlinie h von σ, die durch M parallel zur yz-Ebene geht. Dann ist h'^* die durch M'^* zu s_1^* gezogene Parallele (Fig. 150). Es seien nun $P_3^* \equiv P_3'''^*$ und $P_2^* \equiv P''^*$ die Punkte, in denen jene Parallele die Geraden s_3^* und s_2^* schneidet; die durch jene Punkte bzw. zu O^*y^* und O^*z^* gezogenen Parallelen (die sich auf O^*x^* schneiden) sind dann die Geraden h'''^* und h''^*. Nun muß M''^* auf h''^* liegen und zwar derart, daß die durch M'^* zu O^*y^* und die durch M''^* zu O^*x^* gezogenen Parallelen sich auf O^*z^* schneiden, wodurch M''^* alsbald gefunden wird. Dasselbe gilt von M'''^*. Dann schneiden sich die durch M''^* und M'''^* zu O^*y^* bzw. O^*z^* gezogenen Parallelen in M^*, und damit ist M mehr als hinreichend dargestellt.

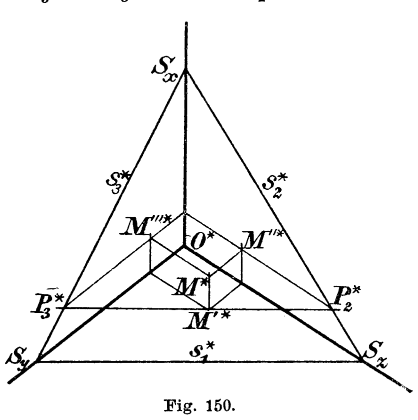


Fig. 150.

Die analoge Aufgabe für den Fall, daß man von dem Punkte M nur die axonometrische Projektion M^* kennt, läßt sich lösen, indem man durch M^* in der Bildebene eine beliebige Gerade g^* zieht und diese als axonometrische Projektion einer Geraden g der gegebenen Ebene auffaßt. Die Spurpunkte von g lassen sich dann auffinden und damit g'^*, g''^*, g'''^*; die durch M^* zu den Achsen gezogenen Parallelen treffen diese Gerade in M'^*, M''^*, M'''^*. Der Leser möge diese Konstruktion vollständig durchführen.

Die für die Darstellung einer beliebigen Ebene gemachten Bemerkungen ermöglichen uns auch, **die axonometrischen Spuren einer Geraden zu finden, die in der üblichen Weise als $g \equiv (g^*, g'^*)$ dargestellt ist.** Zu dem Zwecke legen wir durch g eine beliebige Ebene σ und bestimmen (nach Nr. 118) deren axonometrische Spur $s \equiv s^*$, diese schneidet g^* in dem gesuchten Punkte. Als Hilfsebene nimmt man zweckmäßig eine solche, die die g auf eine der Koordinatebenen projiziert; nehmen wir z. B. (Fig. 151) jene, die g auf die yz-Ebene

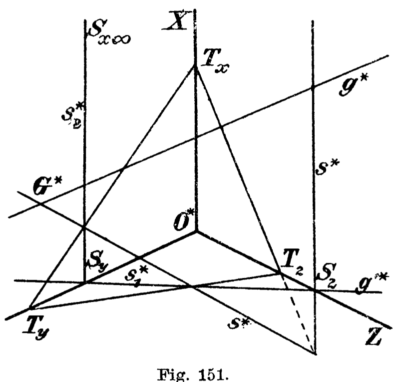


Fig. 151.

projiziert, so fällt ihre erste Spurlinie s_1 mit g' zusammen, während s_2 und s_3 parallel zu Ox sind, weshalb S_x ins Unendliche fällt. Folglich wird $s_1^* \equiv g'^*$; diese Gerade schneide O^*y^* und O^*z^* bzw. in S_y^* und S_z^*; die durch diese Punkte zu O^*x^* gezogenen Parallelen sind s_2^* und s_3^*. Nunmehr ist es leicht, die axonometrische Spur $s \equiv s^*$ dieser Hilfsebene zu finden; sie schneidet g^* in dem gesuchten Punkte $G \equiv G^*$.

119. Mit den gegebenen Grundlagen lassen sich nun alle Probleme der Lage, soweit sie Punkte, Geraden und Ebenen betreffen, lösen. Die Grundgedanken der bezüglichen Lösungen, wie wir sie in den vorigen drei Büchern dargelegt haben, sind auch hier verwendbar, weshalb es uns gestattet sein möge, nur einen kurzen Hinweis auf die auftretenden Konstruktionen zu machen.

I. Gegeben zwei Punkte, $P \equiv (P^*, P'^*)$ und $Q \equiv (Q^*, Q'^*)$; ihre Verbindungslinie zu finden. Man verbinde Q^* mit P^* durch die Gerade r^*, Q'^* mit P'^* durch r'^*, dann ist $r \equiv (r^*, r'^*)$ die gesuchte Gerade. Konstruiert man alsdann P''^*, P'''^*, Q''^*, Q'''^*, so erhält man r''^* und r'''^*. Ein Spezialfall dieser Aufgabe ist die Bestimmung der Projektionen einer Geraden, von der man zwei von den drei Spurpunkten R_1, R_2, R_3 kennt, ein anderer die Bestimmung der Geraden, die durch einen gegebenen Punkt P geht und parallel zu einer gegebenen Geraden p läuft. Sind r^*, r'^* die durch P^* zu p^* und P'^* zu p'^* gezogenen Parallelen, so ist $r \equiv (r^*, r'^*)$ die gesuchte Gerade.

II. Gegeben zwei Ebenen $\alpha \equiv (a_1^*, a_2^*)$, $\beta \equiv (b_1^*, b_2^*)$; gesucht ihre Schnittlinie. Die gesuchte Gerade hat die Spuren $R_1^* \equiv R_1'^* \equiv a_1^* b_1^*$, $R_2 \equiv R_2''^* \equiv a_2^* b_2^*$. Somit ist die Aufgabe (s. oben) zurückgeführt auf die Bestimmung der Projektionen einer Geraden, von der man zwei Spurpunkte kennt.

III. Gegeben ein Punkt $P \equiv (P^*, P'^*)$ und eine Gerade $g \equiv (g^*, g'^*)$, die hierdurch bestimmte Ebene zu konstruieren. Man ziehe durch P zu g die Parallele p; verbindet man die gleichbenannten Spurpunkte von g und p, so hat man die Spurlinien der gesuchten Ebene.

IV. Gegeben eine Ebene $\sigma \equiv [s_1^*, s_2^*]$ und eine Gerade $g \equiv [g^*, g'^*]$, den gemeinsamen Punkt zu finden. Man lege durch g eine beliebige, z. B. die zur yz-Ebene senkrechte Ebene und bestimme deren Schnittlinie mit σ, sie schneidet g im gesuchten Punkte.

Wir empfehlen dem Leser, nach der vorliegenden Methode auch die anderen Probleme der Lage, die wir bei der Mongeschen Methode und der Zentralprojektion behandelt haben, zu lösen. Wegen der zukünftigen Verwendung, wollen wir aber hier noch zwei einfache Anwendungen der letzten Entwicklungen machen:

a) **Gegeben eine Gerade $g \equiv (g^*, g'^*)$, gesucht die axonometrische Spur der durch den Anfangspunkt zu ihr gezogenen Parallelen.** Dargestellt wird diese Gerade durch die beiden durch O^* zu g^* und g'^* gezogenen Parallelen p^* und p'^* (Fig. 152). Um die gesuchte Spur zu finden, dient die zu Ende der vorigen Nummer gegebene Konstruktion; in diesem Falle bilden sich die Spuren der p auf die yz-Ebene projizierenden Hilfsebene ab in p'^* und die beiden anderen in O^*x^*, also ist die axonometrische Spur jener Ebene die Verbindungslinie der Punkte T_x und $T_xT_y \cdot p'^*$; sie trifft p^* in dem gesuchten Punkte S^*.

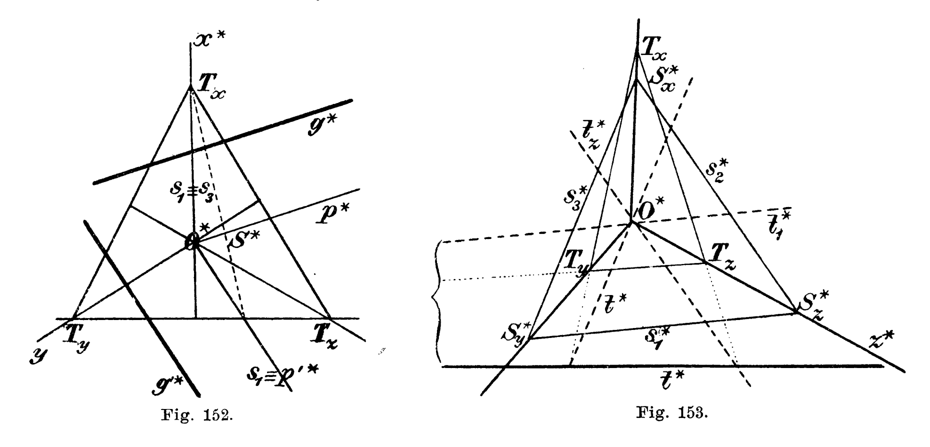


Fig. 152. Fig. 153.

b) **Gegeben eine Ebene $\sigma \equiv [s_1^*, s_2^*]$, die axonometrische Spurlinie der durch den Anfangspunkt zu ihr parallel gelegten Ebene zu finden** (Fig. 153).

Diese Ebene hat als Spuren die durch O^* zu s_1^*, s_2^*, s_3^* gezogenen Parallelen t_1^*, t_2^*, t_3^*; diese Geraden schneiden bzw. T_yT_z, T_zT_x, T_xT_y in drei Punkten der gesuchten Geraden t.

120. Auch solche Aufgaben, in denen die Bedingung des Senkrechtstehens vorkommt, lassen sich nach der jetzt betrachteten Methode leicht lösen. Beachten wir nämlich zunächst, daß, wenn eine Gerade g senkrecht zur Bildebene ist, g', g'', g''' senkrecht zu T_yT_z, T_zT_x, T_xT_y sind, und daher sind zufolge eines bekannten Satzes (s. Nr. 30) auch g'^*, g''^*, g'''^* zu diesen Geraden senkrecht, während g^* sich auf einen Punkt reduziert. — Betrachten wir nun eine Gerade a und eine Ebene α, die zueinander senkrecht sind. Wir ziehen durch O die Gerade b parallel zu a und eine Ebene γ durch O parallel zu α. b treffe die Bildebene in B^*, γ schneide sie in c^*. Dann sind (vgl. Nr. 72) die Gerade c^* und der Punkt B^* entsprechende Elemente in der Antipolarität, deren Distanzkreis, der um O^* mit OO^* beschriebene Kreis ist (sein Radius ist die mittlere Proportionale zwischen T_xO^* und O^*P, wenn T_xP Höhe des Dreiecks $T_xT_yT_z$ ist). Die Verwendung

dieses Umstandes und die Anwendung der in voriger Nummer unter a) und b) gegebenen Konstruktionen liefern uns ein Mittel, alle Aufgaben zu lösen, in denen zueinander senkrechte Geraden und Ebenen auftreten, und zwar durch ein Verfahren, das im Grunde identisch mit dem bei der Zentralprojektion angewendeten ist. So ermöglichen sie, die Aufgabe, von einem Punkte auf eine Ebene das Lot zu fällen, oder durch ihn eine zu einer gegebenen Geraden senkrechte Ebene zu legen, zurückzuführen auf die, durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen (durch O gehenden) Geraden die Parallele zu ziehen, bzw. durch ihn die zu einer gegebenen (auch durch den Anfangspunkt gehenden) Ebene parallele zu legen; ebenso kann man die Aufsuchung des gemeinsamen Lotes zweier windschiefer Geraden zurückführen auf die einer Geraden von gegebener Richtung, die zwei windschiefe trifft.

Es möge hier noch eine Betrachtung beigefügt werden, wie man Aufgaben, die das Senktrechtstehen betreffen, behandeln kann, ohne auf die Antipolarität zurückzugreifen. Betrachten wir nämlich zwei zueinander senkrechte in der xy-Ebene gelegene Geraden, die sich in M schneiden, so entsprechen diese beiden, p und q, sich in einer zirkularen Involution mit dem Zentrum M; sie kann betrachtet werden als bestimmt 1) durch das Geradenpaar a und b, die durch M parallel zu Oy und Oz gezogen sind; 2) durch die Parallele c zu $T_y T_z$ und die hierzu senkrechte Gerade d, beide durch M gehend. Nun projizieren sich a und b in zwei Geraden a^* und b^* parallel zu O^*y^* und O^*z^*, während c^* parallel zu $T_y T_z$, und d^* senkrecht dazu wird. Folglich entsprechen sich p^* und q^* in einer (elliptischen) Involution, in der a^*, b^* und c^*, d^* entsprechende Paare sind. Ebendasselbe läßt sich sagen, wenn die betrachteten Geraden in der zx- oder xy-Ebene liegen. —

Eine andere Art, die Bedingung des Senkrechtstehens der beiden Geraden p, q der yz-Ebene auszudrücken, erhält man, wenn man durch q die zur yz-Ebene senkrechte Ebene σ legt. Da p und q zueinander senkrecht sind, so ist p auch senkrecht zu σ, daher muß p^*, die Orthogonalprojektion von p auf die Bildebene, auch senkrecht zur axonometrischen Spur s von σ sein. (Vgl. Fig. 154). Betrachten wir nun eine beliebige Ebene $\sigma \equiv [s_1^*, s_2^*]$ und in ihr zwei zueinander senkrechte Geraden p, q, die durch M gehen, so entsprechen diese sich in einer Involution, die überreichlich bestimmt ist durch drei Geradenpaare, die entstehen, wenn man durch M die Parallelen m_1, m_2, m_3 und

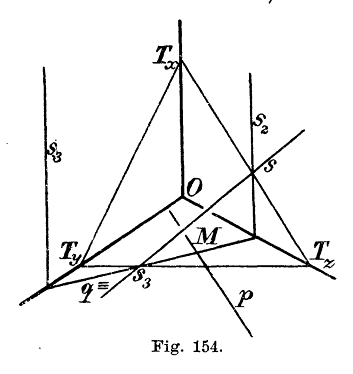


Fig. 154.

die Senkrechten n_1, n_2, n_3 zu s_1, s_2, s_3 zieht. Nun haben m_1, m_2, m_3 als axonometrische Projektionen die durch M^* zu s_1, s_2, s_3 gezogenen Parallelen, während m_1^*, m_2^*, m_3^* durch eines der oben angegebenen Verfahren erhalten werden können; diese sind anwendbar, da ja die Geraden s_1, s_2, s_3 den Koordinatenebenen angehören.

121. Hat man den Kreis Γ mit dem Zentrum O^* und dem Radius OO^* gezeichnet, so lassen sich einige metrische Aufgaben leicht lösen, wie wir jetzt zeigen wollen.

a) Den Abstand eines Punktes $P \equiv (P^*, P'^*)$ von der Bildebene zu finden (Fig. 155).

Wir ziehen die Gerade OP und bestimmen deren axonometrische Spur Q^*, alsdann legen wir das rechtwinklige Dreieck OO^*Q^* in die Bildebene um, dann kommt O in den Endpunkt (O) des zu O^*Q^* senkrechten Radius des Kreises Γ zu liegen; P kommt dann sowohl auf der Geraden $(O)Q^*$ zu liegen, als auch auf der in P^* zu O^*Q^* errichteten Senkrechten, ist also leicht zu finden. Alsdann ist die Strecke $(P)P^*$ der gesuchte Abstand.

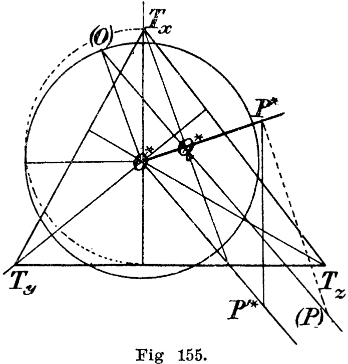


Fig 155.

b) Den Abstand zweier Punkte P, Q zu finden. Man bestimme ihre orthogonalen Projektionen P^*, Q^*, sowie ihre Abstände von der Bildebene. Der gesuchte Abstand ist dann Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete P^*Q^*, dessen andere die Differenz oder die Summe der Abstände von der Bildebene ist (je nachdem P und Q auf derselben oder verschiedenen Seiten der Bildebene liegen).

c) Die Neigung einer Geraden $g \equiv [g^*, g'^*]$ gegen die Bildebene zu finden. Man darf die Annahme machen, daß g durch den Anfangspunkt geht. Man bestimme die axonometrische Spur G^*, dann lege man das Dreieck OO^*G^* in die Bildebene um. O kommt dann in den Endpunkt (O) des zu O^*G^* senkrechten Radius des Kreises Γ zu liegen, und $O^*G^*(O)$ ist der gesuchte Winkel.

d) Den Neigungswinkel einer Ebene $\sigma \equiv (s_1^*, s_2^*)$ gegen die Bildebene zu finden. Man darf annehmen, σ gehe durch den Anfangspunkt O. Man bestimme nun ihre axonometrische Spur s, dann fälle man das Lot O^*H auf s und ziehe den hierzu parallelen Radius $O^*(O)$ von Γ; der spitze Winkel $O^*H(O)$ ist dann gleich dem gesuchten.

Wir haben also bei der Lösung dieser Aufgaben unsere Zuflucht

zu der Umlegung einer Ebene in die Bildebene genommen; man bedient sich dieses Kunstgriffs in der Regel (sowohl bei der vorliegenden, als auch bei den früheren Methoden), um metrische Probleme zu lösen. Die Umlegung $(\mathfrak{F})$ einer in der Ebene σ gelegenen Figur $\mathfrak{F}$ steht (vgl. Nr. 36) mit der Orthogonalprojektion $\mathfrak{F}^*$ auf die Bildebene in einer Affinitätsbeziehung: die Affinitätsachse ist die axonometrische Spur von σ, das Affinitätsverhältnis der Kosinus des Winkels, den σ mit der Bildebene bildet. Da wir nun das Verfahren kennen, sowohl jene Spurlinie zu finden, als auch diesen Winkel zu bestimmen, so ist nichts leichter, als diese Affinität vollständig zu bestimmen.

Die Aufsuchung des Winkels zweier beliebiger Geraden oder zweier beliebiger Ebenen mit Hilfe von Umlegungen wollen wir dem Leser überlassen.

Viertes Kapitel.

Schiefe Axonometrie.

122. Wir nehmen jetzt an, daß die Projektion aller Punkte des Raumes parallel zu einer Geraden g, die nicht senkrecht zur Bildebene ist, erfolgen soll. Diese Gerade können wir uns, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu tun, durch O gelegt denken. Wir wollen zuerst zeigen, wie die in Nr. 107 angegebene Fundamentalkonstruktion der rechtwinkligen Axonometrie auch in diesem allgemeineren Falle anwendbar bleibt. Zu dem Zwecke tragen wir auf den positiven Richtungen der Achsen OX, OY, OZ die drei Strecken $OU, OV, OW = e$, gleich der gewählten Maßeinheit ab; deren axonometrische schräge Projektionen seien $O'U' = l$, $O'V' = m$, $O'W' = n$, und die Richtungen $O'V'\ldots$ seien zugleich die positiven auf $O'X'\ldots$ (s. Fig. 156).

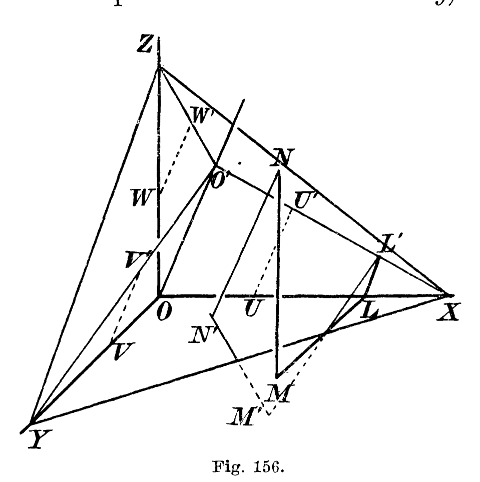


Fig. 156.

Die Verhältniszahlen $\frac{l}{e} = \lambda$, $\frac{m}{e} = \mu$, $\frac{n}{e} = \nu$ hängen dann bloß von der Lage der Bildebene gegen die Koordinatachsen und gegen die Gerade g ab (vgl. Nr. 2, Schlußbemerkung); in Analogie mit der im vorigen Kapitel gebrauchten Bezeichnung wollen wir sie auch hier Verkürzungs-

zahlen nennen, wenngleich sie auch größer als 1 werden können. l, m, n sind hingegen die Intervalle der axonometrischen Skalen, die wir gerade so wie bei der orthogonalen Axonometrie konstruieren können. Zeichnen wir wieder den Linienzug $OLMN$, dessen Teilstrecken $OL = x$, $LM = y$, $MN = z$ sind, und projizieren ihn auf die Bildebene parallel zu g. L hat dann als Projektion einen Punkt L' derart, daß $\frac{\overline{O'L'}}{\overline{OL}} = \frac{\overline{O'U'}}{\overline{OU}} = \lambda$, daher ist $O'L' = \lambda \cdot |x|$, und es liegt L' auf dem positiven oder negativen Teile von $O'X'$, je nachdem $x \gtrless 0$. Ebenso wird $L'M'$ parallel zu $O'Y'$, und $\frac{\overline{L'M'}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{O'V'}}{\overline{OV}} = \mu$; daher $\overline{L'M'} = \mu \cdot |y|$, und $L'M'$ und $O'V'$ haben denselben Richtungssinn, nur wenn $y > 0$. Schließlich wird $M'N'$ parallel zu $O'Z'$, und $\frac{\overline{M'N'}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{O'W'}}{\overline{OW}} = \nu$; daher $\overline{M'N'} = \nu \cdot |z|$, und $O'W'$ und $M'N'$ haben denselben Sinn, nur wenn $z > 0$. Dies zeigt uns (was wir oben behauptet haben), wenn wir in der Bildebene die Geraden $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ und die Intervalle l, m, n haben, bzw. die Zahlen λ, μ, ν kennen, oder die Punkte U', V', W', daß wir dann die schiefe, axonometrische Projektion eines jeden, durch seine Koordinaten gegebenen, Punktes nach demselben Verfahren, wie bei der orthogonalen Axonometrie konstruieren können.

Nun sahen wir bei der letzteren (Seite 177), daß es genügt, die axonometrischen Projektionen der Koordinatachsen gezeichnet zu haben, um damit die Verkürzungszahlen, und daher auch die axonometrischen Skalen zu erhalten; trifft etwas ähnliches auch bei der schiefen Axonometrie zu? Auf diese Frage antwortet in negativem Sinne der folgende wichtige

123. Satz von Pohlke: Drei von demselben Punkte ausgehende und in derselben Ebene liegende Strecken von beliebiger Länge, vorausgesetzt, daß höchstens eine gleich 0 und höchstens einer der von ihnen gebildeten Winkel 0 ist, können immer als Parallelprojektion dreier gleich langer Strecken angesehen werden, die die Kanten eines dreirechtwinkligen Dreiflachs bilden, und deren gemeinsame Länge durch die gegebenen Stücke bestimmt wird.

Beweis: Die drei in der Bildebene gegebenen Strecken wollen wir mit $O'U'$, $O'V'$, $O'W'$ bezeichnen, während OU, OV, OW die drei gleichen, rechtwinklig aufeinander stehenden Strecken bedeuten, deren Vorhandensein der Satz behauptet.

Wir beginnen mit dem Nachweise, daß die beiden in dem Satze ausgesprochenen Bedingungen für das Bestehen desselben notwendig sind: **a)** Wenn die Strecke $O'U'$ gleich Null ist, d. h. wenn U' mit O' zusammenfällt, so laufen die Projektionsstrahlen mit der Geraden

OU parallel; nun sind die Geraden OV und OW beide senkrecht zu OU, also nicht parallel zu den Projektionsstrahlen, also kann weder V' noch W' mit O' zusammenfallen, d. h. keine der Strecken $O'V'$, $O'W'$ kann gleich Null werden; folglich kann nicht mehr als eine der genannten Strecken gleich Null sein. b) Sei nun $\sphericalangle U'O'V' = 0$, so heißt das, daß die Geraden $O'U'$, $O'V'$ zusammenfallen; dann sind die Projektionsstrahlen parallel der Ebene UOV; da die Ebene VOW senkrecht zu der vorigen, so kann sie nicht parallel zu den Projektionsstrahlen sein, und daher kann keiner der Winkel $V'O'W'$, $W'O'U'$ gleich Null werden.

Wir wollen nun zeigen, daß die angeführten Bedingungen auch hinreichend sind. Hierzu genügt der Nachweis, daß, wenn man drei gleiche und zueinander rechtwinklige Strecken nimmt, diese sich in einer passend gewählten Richtung d und auf eine geeignet gewählte Ebene τ so projizieren lassen, daß man ein Viereck $O_1U_1V_1W_1$ erhält, welches dem gegebenen Vierecke $O'U'V'W'$ ähnlich ist. Hat man nämlich ein solches erhalten und setzt

$$\frac{\overline{O_1U_1}}{\overline{O'U'}} = \frac{\overline{O_1V_1}}{\overline{O'V'}} = \frac{\overline{O_1W_1}}{\overline{O'W'}} = k,$$

und nimmt dann auf OU, OV, OW die Strecken

$$\overline{OU_2} = \frac{1}{k}\overline{OU}, \quad \overline{OV_2} = \frac{1}{k}\overline{OV}, \quad \overline{OW_2} = \frac{1}{k}\overline{OW}$$

und projiziert die Punkte O, U_2, V_2, W_2 in der Richtung d auf die Ebene τ, so bekommt man ja die Strecken

$$\overline{O'U_2'} = \frac{1}{k}\overline{O_1U_1} = \overline{O'U'}, \quad \overline{O'V_2'} = \frac{1}{k}\overline{O_1V_1} = \overline{O'V'},$$

$$\overline{O'W_2'} = \frac{1}{k}\overline{O_1W_1} = O'W',$$

wie es sein sollte.

Nehmen wir nun an, wir hätten die Punkte O_1, U_1, V_1, W_1 schon erhalten: wir betrachten den Punkt, in dem sich die beiden Geraden U_1V_1 und O_1W_1 schneiden, und nennen ihn A_1 oder B_1, je nachdem wir ihn als der Geraden U_1V_1 oder der O_1W_1 angehörend betrachten. Er ist dann die Projektion eines Punktes A der Geraden UV und die eines Punktes B von OW. Da bei jeder Parallelprojektion das Verhältnis der Strecken auf derselben Geraden erhalten bleibt, so ist

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AW}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{A_1W_1}}, \qquad \frac{\overline{UB}}{\overline{BV}} = \frac{\overline{U_1B_1}}{\overline{B_1V_1}}. \tag{1}$$

Da nun der Voraussetzung nach die Figur $O'U'V'W'$ ähnlich

$O_1 U_1 V_1 W_1$, so ist, wenn wir den Schnittpunkt $(U'V', O'W')$ sowohl mit A' als auch B' bezeichnen

$$\frac{\overline{O'A'}}{\overline{A'W'}} = \frac{\overline{O_1 A_1}}{\overline{A_1 W_1}}, \quad \frac{\overline{U'B'}}{\overline{B'V'}} = \frac{\overline{U_1 B_1}}{\overline{B_1 V_1}}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AW}} = \frac{\overline{O'A'}}{\overline{A'W'}}, \quad \frac{\overline{UB}}{\overline{BV}} = \frac{\overline{U'B'}}{\overline{B'V'}}. \tag{3}$$

In diesen Gleichungen sind die rechten Seiten bekannt, ebenso die Punkte O, U, V, W, folglich lassen sich die Punkte A und B, als solche, die OV und OW in bestimmtem Verhältnis teilen, unzweideutig bestimmen. Da nun A' mit B' zusammenfällt, so bestimmt die Gerade AB die Richtung d, in welcher die gesuchte Parallelprojektion auszuführen ist.

Durch die Punkte U, V, W ziehen wir nun die Parallelen zu AB; man kann dann (vgl. Nr. 43, Anm.) auf unzählig viele Weisen sie mit einer Ebene σ_0 so schneiden, daß das entstehende Dreieck $U_0 V_0 W_0$ ähnlich dem Dreiecke $U'V'W'$ wird; die Stellung der Ebene σ_0 ist auf zweierlei Weise bestimmt. Ist nun O_0 der Punkt, in dem σ_0 von der durch O zu d gezogenen Parallelen geschnitten wird, so schneiden sich die Geraden $O_0 W_0$ und $U_0 V_0$ in einem Punkte $A_0 \equiv B_0$, der die Spur der Geraden AB auf σ_0 ist, und dann ist

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AW}} = \frac{\overline{O_0 A_0}}{\overline{A_0 W_0}}, \quad \frac{\overline{UB}}{\overline{BV}} = \frac{\overline{U_0 B_0}}{\overline{B_0 V_0}}. \tag{4}$$

Weil nun die Dreiecke $U'V'W'$ und $U_0 V_0 W_0$ einander ähnlich sind, so gibt es in der Ebene des zweiten Dreiecks sicherlich einen Punkt X derart, daß auch die beiden Vierecke $O'U'V'W'$ und $X U_0 V_0 W_0$ einander ähnlich sind. Den Schnittpunkt der beiden Geraden $U_0 V_0$ und $X W_0$ wollen wir Y oder Z nennen, je nachdem wir ihn als der ersten oder der zweiten Geraden angehörend betrachten. Dann ist:

$$\frac{\overline{O'A'}}{\overline{A'W'}} = \frac{\overline{XY}}{\overline{YW_0}}, \quad \frac{\overline{U'B'}}{\overline{B'V'}} = \frac{\overline{U_0 Z}}{\overline{Z V_0}}. \tag{5}$$

(5) mit (3) kombiniert liefert

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AW}} = \frac{\overline{XY}}{\overline{YW_0}}, \quad \frac{\overline{UB}}{\overline{BV}} = \frac{\overline{U_0 Z}}{\overline{Z V_0}}, \tag{6}$$

und diese mit (4) vereint zeigt, daß

$$\frac{\overline{O_0 A_0}}{\overline{A_0 W_0}} = \frac{\overline{XY}}{\overline{YW_0}}, \quad \frac{\overline{U_0 B_0}}{\overline{B_0 V_0}} = \frac{\overline{U_0 Z}}{\overline{Z V_0}}. \tag{7}$$

Aus der letzteren folgt, daß $Y \equiv Z$ mit $B_0 \equiv A_0$ zusammenfallen muß. Es wird daher die erstere von (7) zu

$$\frac{\overline{O_0 A_0}}{\overline{A_0 W_0}} = \frac{\overline{X A_0}}{\overline{A_0 W_0}},$$

der Punkt X fällt also mit O_0 zusammen. Demzufolge ist das Viereck $O_0 U_0 V_0 W_0$ ähnlich dem $O'U'V'W'$, das erstere ist also jene Projektion des Tetraeders $OUVW$, das man nach dem Pohlkeschen Satz erhalten sollte.

Die Existenz dieses Tetraeders ist somit nachgewiesen; zugleich ist gezeigt, daß es unzweideutig bestimmt ist, und daß die Richtung, in der die drei gleichen und zueinander senkrechten Strecken zu projizieren sind, leicht zu konstruieren ist, um ein dem gegebenen ähnliches Viereck zu erhalten, und daß auch (auf zwei Weisen) die Stellung der Ebene, auf die man projizieren muß, bestimmt ist.

124. Will man also eine axonometrische Projektion ausführen, so kann man in der Zeichenebene sowohl die Träger $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$, als auch die Intervalle der axonometrischen Skalen beliebig wählen; alsdann liefert uns die in Nr. 115 ausgeführte Konstruktion leicht die axonometrische Projektion jedes beliebigen, durch seine Koordinaten fixierten Punktes. Will man jedoch zweckmäßige Systeme erhalten, so muß man die Bildebene und die Richtung der Projektionsstrahlen in geeigneter Weise wählen. Von besonderem praktischen Nutzen ist z. B. die Wahl der Bildebene, daß man sie parallel zu einer der Koordinatebenen, z. B. zur Ebene XOZ nimmt (wobei wir annehmen wollen, daß OZ vertikal laufe). Die entsprechende Axonometrie heißt dann Kavalierperspektive. Um sich über ihren Wert klar zu werden, beachte man nur, daß die Strecken OL und MN des üblichen Linienzuges für einen Punkt N des Raumes sich in wahrer Größe abbilden, somit sind zwei der Verkürzungszahlen gleich 1. Wenn dann ferner die Projektionsstrahlen mit der Bildebene den Winkel $\frac{\pi}{4}$ bilden, so wird auch die Projektion der Strecke LM gleich der Strecke selbst, und um dieses Projektionssystem zu charakterisieren, genügt die Kenntnis des Abstandes der Bildebene von der Ebene XOZ [1]).

In dem in der Praxis am häufigsten vorkommenden Falle, daß die Achse OZ vertikal ist, nimmt man als Bildebene meistens eine zu dieser parallele (also auch vertikale) Ebene; wir sehen, wie man

1) Weitere Einzelheiten über dieses System der axonometrischen Projektion finden sich bei E. Ciani, *La prospettiva cavaliera a quarantacinqua gradi* (Milano 1903).

dann alle axonometrischen Konstanten erhalten kann.[1]) Es handle sich nun (vgl. Fig. 157) um die Abbildung einer Figur $\mathfrak{F}$, von der alle Punkte sich auf die Horizontalebene innerhalb eines Rechteckes $OADB$ projizieren, von dem eine Seite OA auf OX, eine andere OB auf OY fällt; als Bildebene π wählen wir die durch AB parallel zu OZ gehende. Das axonometrische Dreieck ist dann uneigentlich und hat als Seiten AB und die durch A und B zu OZ gezogenen Parallelen, seine Spurpunkte sind A, B, und Z_∞ der unendlich ferne Punkt von OZ. Wir wollen weiter annehmen, daß die Richtung der Projektionsstrahlen derartig sei, daß die axonometrische Projektion O_1 des Anfangspunktes innerhalb dieses degenerierten Dreiecks falle, und diese Richtung sei bestimmt durch eine durch O gezogene Gerade l, die selber durch ihre Orthogonalprojektionen l' auf XOY, l'' auf XOZ fixiert ist. Analog seien auch die Projektionen von $\mathfrak{F}$ auf diese beiden Ebenen mit $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ bezeichnet, während die axonometrische Projektion $\mathfrak{F}_1$ heißen soll. Der Punkt O_1 ist der Schnitt von l mit der Bildebene π, O_1' der von l' mit AB, O_1'' der von l'' mit $O_1'Z_\infty$. Legen wir jetzt die Bildebene π in die Horizontalebene um, so kommt

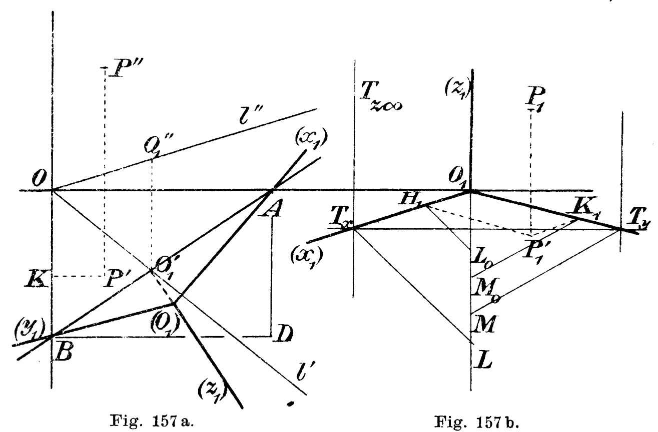


Fig. 157 a. Fig. 157 b.

O_1 in eine Lage (O_1), die leicht zu konstruieren ist, da (O_1) auf der in O_1' zu AB errichteten Senkrechten in einem Abstande gleich der ersten Kote von O_1. Da A und B bei der Umlegung an ihrer Stelle bleiben, so sind die Geraden $A(O_1)$, $B(O_1)$ die Umlegungen (x_1), (y_1) der zwei axonometrischen Achsen; die dritte (z_1) ist die durch O_1 zu AB senkrecht gezogene Gerade, d. i. $O_1'(O_1)$. Die Verkürzungszahlen sind demnach bekannt und haben die Werte bzw.

$$\lambda = \frac{\overline{O_1 A}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{(O_1)A}}{\overline{OA}}, \quad \mu = \frac{\overline{O_1 B}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{(O_1)B}}{\overline{OB}}, \quad \nu = 1.$$

1) Vgl. C. Beyel, *Über Axonometrie und schiefe Parallelprojektion* (Archiv f. Math. u. Phys., III. Reihe, 4. Bd. 1903, S. 237 ff.)

Man hat also in der Zeichenebene alle Elemente um $\mathfrak{F}_1$ zu konstruieren (Fig. 157a), nur besteht noch der Übelstand, daß $\mathfrak{F}_1$ die Projektion $\mathfrak{F}'$ überdeckt. Um diesen zu beseitigen, nehmen wir auf der Grundlinie Ox (außerhalb OA) irgendwo den Punkt O_1 und die zugehörige Ordinate (in positivem Sinne) als axonometrische Achse z_1 (s. Fig. 157b). Von O_1 tragen wir auf ihr im negativen Sinne die Strecke $\overline{O_1 C} = \overline{O_1'(O_1)}$ ab, und ziehen durch C die Parallele zur Grundlinie, auf der wir von C aus nach der einen Seite $\overline{CT_x} = \overline{O_1'A}$, nach der anderen $\overline{CT_y} = \overline{O_1'B}$ abtragen; die Geraden O_1T_x, O_1T_y sind dann die beiden Achsen x_1, y_1. Tragen wir auf z_1 die Strecken $\overline{O_1 L} = \overline{OA}$, $\overline{O_1M} = \overline{OB}$ ab, so wird

$$\frac{\overline{O_1 T_x}}{\overline{O_1 L}} = \frac{\overline{(O_1)A}}{\overline{OA}} = \lambda, \quad \text{und} \quad \frac{\overline{O_1 T_y}}{\overline{O_1 M}} = \frac{\overline{(O_1)B}}{\overline{OB}} = \mu;$$

man hat also auch in der neuen Figur alle für die gewünschte axonometrische Projektion notwendigen Elemente. Ist nun $P \equiv (P', P'')$ ein beliebiger Punkt des Raumes mit den Koordinaten x, y, z, die durch die Strecken OH, OK, HP'' gemessen werden (s. Fig. 157), und ist P_1 seine axonometrische Projektion, so haben wir

$$\frac{\overline{OH}}{\overline{O_1 H_1}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{O_1 A_1}} = \frac{\overline{O_1 L}}{\overline{O_1 T_x}};$$

trägt man daher auf $O_1 L$ die Strecke $O_1 L_0 = x$ ab und zieht durch L_0 die Parallele zu LT_x, so schneidet diese x_1 im Punkte H_1.

Ebenso muß

$$\frac{\overline{OK}}{\overline{O_1 K_1}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{O_1 B_1}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{O_1 B}} = \frac{\overline{O_1 M}}{\overline{O_1 T_y}}$$

werden; trägt man daher auf $O_1 M$ die Strecke $O_1 M_0 = y$ ab und zieht durch M_0 die Parallele zu MT_y, so schneidet diese y_1 im Punkte K_1. Die vierte Ecke des Parallelogramms $H_1 O_1 K_1$ ist P_1'; durch P_1' hat man nur noch die Parallele zu z_1 zu ziehen und auf ihr die Strecke z nach Größe und entsprechender Richtung abzutragen, um als Endpunkt den gesuchten Punkt P_1 zu erhalten.

Fünftes Kapitel.

Perspektive Axonometrie.

125. Um eine perspektive Axonometrie festzulegen, muß die Lage des Projektionszentrums C und die der Projektionsebene π in bezug auf die Koordinatachsen gegeben sein; zu dem Zwecke geben

wir die Koordinaten von C als a, b, c und die Maßzahlen p, q, r für die Strecken OT_x, OT_y, OT_z, welche die π auf den Koordinatachsen abschneidet; der positive Sinn der letzteren falle mit $O \ldots T_x$ usw. zusammen. Die Gerade OC schneidet π in O', der axonometrischen Projektion von O, so daß $O'T_x$, $O'T_y$, $O'T_z$ die axonometrischen Achsen werden; auf ihnen nehmen wir wieder die Richtungen vom Anfangspunkte O' aus nach T_x, T_y, T_z hin als positiv.

Wir betrachten jetzt einen beliebigen Punkt P des Raumes mit den Koordinaten x, y, z; seine Projektion sei P', und die x entsprechende axonometrische Abszisse $O'P'$ sei x'. Dann entsprechen sich die Punkte P, P' in den beiden (in bezug auf das Zentrum C) perspektivischen Punktreihen auf den Geraden OX und $O'X'$; folglich besteht zwischen den Abszissen x, x' eine bilineare Gleichung, und da dem Punkte O mit $x = 0$ der Punkt O' mit $x' = 0$ entspricht, so besitzt sie keinen konstanten Terminus, sie hat also folgende Form:

$$xx' - fx' - l'x = 0. \tag{1}$$

Ähnliche Beziehungen erhält man bei Betrachtung der beiden anderen Achsen, so daß man schreiben kann:

$$x' = \frac{l'x}{x-f}, \quad y' = \frac{m'y}{y-g}, \quad z' = \frac{n'z}{z-h}. \tag{1a}$$

Die hier auftretenden sechs Konstanten f, g, h und l', m', n' haben eine wichtige geometrische Bedeutung, die unschwer zu finden ist.

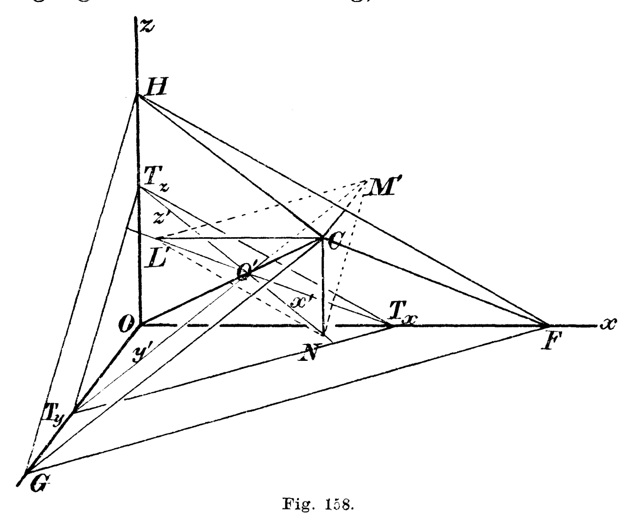


Fig. 158.

Die Gl. (1) zeigen nämlich, daß für $x = f$, $y = g$, $z = h$ resp. $x' = \infty$, $y' = \infty$, $z' = \infty$ wird; f, g, h sind also die Abszissen derjenigen Punkte F, G, H der Punktreihen OX, OY, OZ, die den unendlich

fernen der axonometrischen Achsen entsprechen, d. h. die Abszissen der Fluchtpunkte der Koordinatachsen. F, G, H sind folglich die Schnittpunkte der Achsen selbst mit der durch das Projektionszentrum C zur Bildebene π parallel gelegten Ebene (s. Fig. 158). — Schreiben wir jetzt die Gl. (1) folgendermaßen:

$$x' = \frac{l'}{1 - \frac{f}{x}}, \quad y' = \frac{m'}{1 - \frac{g}{y}}, \quad z' = \frac{n'}{1 - \frac{h}{z}},$$

so erkennt man, daß folgende Paare von Abszissen einander entsprechen:

$$x = \infty,\ x' = l'; \quad y = \infty,\ y' = m'; \quad z = \infty,\ z' = n';$$

also sind l', m', n' die axonometrischen Abszissen derjenigen Punkte L', M', N' auf den axonometrischen Achsen, die den unendlich fernen der Koordinatachsen entsprechen: sie sind also die Fluchtpunkte der axonometrischen Achsen, und man erhält sie, als Spuren auf der Ebene π, wenn man durch C die Parallelen zu den Koordinatachsen zieht.

126. Nehmen wir nun an, die Punkte F, G, H auf den Koordinatachsen OX, OY, OZ, sowie L', M', N' auf den axonometrischen Achsen $O'X', O'Y', O'Z'$ seien gezeichnet, dann sind die Konstanten $f, g, h; l', m', n'$ bestimmt, und also die Gl. (1) bekannt. Werden uns jetzt die Koordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes P im Raume gegeben, so können wir mit Hilfe dieser Gleichungen die Größen x', y', z' berechnen und dann die Projektionen Q', R', S' der drei auf den Koordinatachsen liegenden Ecken Q, R, S des P „projizierenden Quaders" (es hat O und P als entgegengesetzte Ecken und vier Kanten parallel den Koordinatachsen) zeichnen. Wir wollen nun zeigen, wie wir (durch Verallgemeinerung der Fundamentalkonstruktion der orthogonalen Axonometrie in Nr. 107, die wir schon in Nr. 122 auf die schiefe Axonometrie erweitert haben) auch P' konstruieren können. Zu dem Zwecke betrachten wir das genannte Quader, dessen übrige Ecken T, U, V sein mögen, und daran die Parallelogramme $OQVR$ und $OSPV$. Die Gerade QV ist die Verbindungslinie von Q mit dem unendlich fernen Punkte von OY, daher wird ihre axonometrische Projektion die Verbindungslinie von Q' mit M' sein. Ebenso ist RV die Verbindung von R mit dem unendlich fernen der OX-Achse, und daher ihre axonometrische Projektion die Verbindung von R' mit L'. $Q'M'$ und $R'L'$ schneiden sich in einem Punkte, der offenbar die Projektion von V ist, also V'. Ferner sind parallel die beiden Geraden SP und OV (s. Fig. 159a), deswegen muß $S'P'$ zu demjenigen Punkte $O'V'$ laufen, der dem unendlich fernen von OV entspricht, dieser ist aber derjenige Punkt I' von

$O'V'$, in welchem die Gerade $O'V'$ von $L'M'$ geschnitten wird, P' liegt also auf $S'I'$. Schließlich ist VP parallel zu OZ, geht also durch den unendlich fernen Punkt N von OZ; $V'P'$ muß also durch

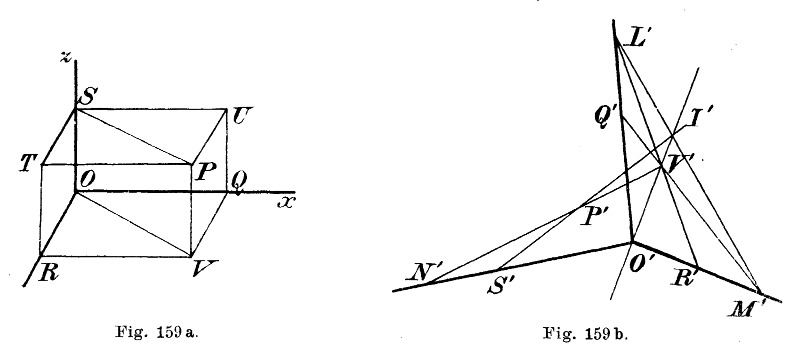


Fig. 159 a. Fig. 159 b.

N' gehen. Also ist P' der Schnittpunkt von $S'I'$ mit $V'N'$ (siehe Fig. 159b) und damit völlig und eindeutig bestimmt.

Aus dem vorigen ergibt sich, daß zur Konstruktion der Projektion P' eines Punktes, der durch seine Koordinaten gegeben ist, notwendig und hinreichend ist die Kenntnis 1. der Disposition der axonometrischen Achsen, d. h. der Winkel $Y'O'Z' = \xi$, $Z'O'X' = \eta$, $X'O'Y' = \zeta$, die der Beziehung $\xi + \eta + \zeta = 2\pi$ gehorchen, 2. der sechs axonometrischen Grundkonstanten f, g, h; l', m', n'. Jene Winkel und diese Konstanten sind aber bestimmt, wenn man die Lage des Zentrums C und der Bildebene π in bezug auf die Koordinatachsen kennt (die sogenannten Orientierungskonstanten der betrachteten Perspektivität) die wir zu Anfang dieses Kapitels mit a, b, c; p, q, r bezeichneten; es müssen also jene 9 Konstanten sich als Funktionen dieser 6 ausdrücken lassen, und diese Beziehung wollen wir nun aufsuchen.

127. Wir beginnen mit der Betrachtung der Ebene π, die die Gleichung

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

hat; daher ist die der durch C parallel zu π gelegten Ebene FGH:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = k,$$

wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} = k \tag{2}$$

setzen. Die Strecken, die diese Ebene auf den Koordinatachsen abschneidet, vom Anfangspunkte aus gerechnet, sind daher

$$f = kp, \quad g = kq, \quad h = kr. \tag{3}$$

Setzen wir nun

$$OC = \varrho, \quad O'C = \varrho',$$

so haben wir, weil die Geraden $O'T_x$ und CF einander parallel sind (vgl. Fig. 159)

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OO'}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OT_x}}, \quad \text{oder} \quad \frac{\varrho}{\varrho - \varrho'} = \frac{f}{p},$$

und daher wegen Gl. (3)

$$k = \frac{\varrho}{\varrho - \varrho'} \tag{4}$$

oder

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{k-1}{k}. \tag{4'}$$

Der Punkt O' (der Schnitt von OC mit π) hat offenbar die Koordinaten

$$\frac{a}{k}, \quad \frac{b}{k}, \quad \frac{c}{k},$$

und wenn wir nun setzen

$$\overline{O'T_x} = u, \quad \overline{O'T_y} = v, \quad \overline{O'T_z} = w,$$

so finden wir

$$u^2 = \left(p - \frac{a}{k}\right)^2 + \frac{b^2 + c^2}{k^2}, \quad v^2 = \left(q - \frac{b}{k}\right)^2 + \frac{c^2 + a^2}{k^2},$$

$$w^2 = \left(r - \frac{c}{k}\right)^2 + \frac{a^2 + b^2}{k^2},$$

oder auch, weil

$$\varrho^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$u^2 = p^2 - \frac{2ap}{k} + \frac{\varrho^2}{k^2}, \quad v^2 = q^2 - \frac{2bq}{k} + \frac{\varrho^2}{k^2}, \quad w^2 = r^2 - \frac{2cr}{k} + \frac{\varrho^2}{k^2}. \tag{5}$$

Um jetzt die Größen l', m', n' zu finden, beachten wir, daß in der zwischen den Punktreihen auf OX und $O'X'$ bestehenden Projektivität T_x ein vereinigter Punkt ist, daher muß in der diese Beziehung darstellenden Gleichung (1) [in Nr. 125] dem $x = p$ ein $x' = u$ entsprechen; das gibt

$$pu - fu - l'p = 0.$$

Setzen wir hierin für f seinen Wert aus (3) ein, so erhält man die erste der folgenden drei Gleichungen:

$$l' = (1-k)u, \quad m' = (1-k)v, \quad n' = (1-k)w, \tag{6}$$

während man die beiden anderen in analoger Weise erhält. Setzt man nun hierin die Werte für k, u, v, w aus (2) und (5) ein, so erhält man die gesuchten Ausdrücke für l', m', n' durch die Orientierungskonstanten.

In dem Dreiecke $T_y O' T_z$ ist nun

$$\overline{O'T_y} = v, \quad \overline{O'T_z} = w, \quad \sphericalangle\, T_y O' T_z = \xi,$$

und

$$T_y T_z = \sqrt{q^2 + r^2};$$

daher ist

$$q^2 + r^2 = v^2 + w^2 - 2vw \cos \xi.$$

Aus dieser und zwei analogen Gleichungen erhält man:

$$\cos \xi = \frac{(v^2 + w^2) - (q^2 + r^2)}{2vw}, \quad \cos \eta = \frac{(w^2 + u^2) - (r^2 + p^2)}{2wu},$$

$$\cos \zeta = \frac{(u^2 + v^2) - (p^2 + q^2)}{2uv}, \tag{7}$$

und wenn man auch hierin für u, v, w seine Werte aus (5) einsetzt, so erhält man die gesuchten Ausdrücke für die Winkel ξ, η, ζ durch die Orientierungskonstanten.

Eliminieren wir aus den aufgestellten Gleichungen diese Konstanten, so gelangen wir zu den drei Gleichungen, die zwischen den Winkeln ξ, η, ζ und den sechs axonometrischen Konstanten bestehen. Eine dieser Beziehungen ist offenbar diese:

$$\xi + \eta + \zeta = 2\pi; \tag{8}$$

um die anderen zu erhalten, setzen wir in die erste der Gl. (7) die Werte

$$u = \frac{l'}{1-k}, \quad v = \frac{m'}{1-k}, \quad w = \frac{n'}{1-k}; \quad p = \frac{f}{k}, \quad q = \frac{g}{k}, \quad r = \frac{h}{k},$$

die sich aus (6) und (3) ergeben, ein, und beachten auch die Gl. (4'). Dann bekommen wir, wenn wir noch zur Abkürzung $\frac{\varrho'}{\varrho} = \tau$ setzen:

$$\cos \xi = \frac{(m'^2 + n'^2) - \tau^2 (g^2 + h^2)}{2m'n'}, \quad \cos \eta = \frac{(n'^2 + l'^2) - \tau^2 (h^2 + f^2)}{2n'l'},$$

$$\cos \zeta = \frac{(l'^2 + m'^2) - \tau^2 (f^2 + g^2)}{2l'm'}. \tag{9}$$

Setzen wir die für τ^2 sich hieraus ergebenden Werte gleich, so erhalten wir

$$\frac{m'^2 + n'^2 - 2m'n' \cos \xi}{g^2 + h^2} = \frac{n'^2 + l'^2 - 2n'l' \cos \eta}{h^2 + f^2} = \frac{l'^2 + m'^2 - 2l'm' \cos \zeta}{f^2 + g^2}, \tag{10}$$

und diese Gleichung enthält die drei gesuchten Beziehungen; ihr Inhalt ist leicht in Worte zu kleiden, sie ist nämlich gleichbedeutend mit

$$\frac{\overline{M'N'}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{N'L'}}{\overline{HF}} = \frac{\overline{L'M'}}{\overline{FG}};$$

sie sagt uns also, daß die Dreiecke FGH und $L'M'N'$ einander ähnlich seien, welche Eigenschaft offenbar ist, da diese (immer spitz-

winkligen) Dreiecke entstehen, indem man zwei rechtwinklige Dreikante, deren Kanten parallel laufen, durch zwei zueinander parallele Ebenen schneidet.

128. Wollen wir also in der Bildebene die Projektion P' eines beliebigen Punktes $P(x, y, z)$ zeichnen, so können wir die drei Winkel ξ, η, ζ beliebig wählen, d. h. nach Belieben die Geraden $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ zeichnen, desgleichen die Konstanten l', m', n', also die Punkte L', M', N' beliebig auf $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ wählen, sowie schließlich auch das Verhältnis $\frac{\varrho'}{\varrho} = \tau$. Die anderen drei Konstanten f, g, h sind dann bestimmt und können nach folgenden drei Formeln, die sich aus Gl. (9) leicht ableiten lassen, berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\tau^2 f^2 &= l'^2 - l'n' \cdot \cos\eta - l'm' \cdot \cos\zeta + m'n' \cdot \cos\xi,\\
\tau^2 g^2 &= m'^2 - m'l' \cdot \cos\zeta - m'n' \cdot \cos\xi + n'l' \cdot \cos\eta,\\
\tau^2 h^2 &= n'^2 - n'm' \cdot \cos\xi - n'l' \cdot \cos\eta + l'm' \cdot \cos\zeta.
\end{aligned}$$

Nebenbei können wir noch folgern: „Zieht man von einem Punkte O' aus drei beliebige Strecken $\overline{O'L'}$, $\overline{O'M'}$, $\overline{O'N'}$, die nur die eine Bedingung zu erfüllen haben, daß $L'M'N'$ ein spitzwinkliges Dreieck ist, so können die Geraden $O'L'$, $O'M'$, $O'N'$ immer als die Zentralprojektionen der Kanten einer dreirechtwinkligen Ecke angesehen werden, und die Punkte $L'M'N'$ als die Fluchtpunkte."

Wir fügen noch hinzu, daß man, um den Punkt P' zu finden, beliebig (mit einer einzigen Einschränkung) die sechs Größen l', m', n'; f, g, h wählen kann. Um dies zu zeigen, genügt der Nachweis, daß durch diese Daten die Winkel ξ, η, ζ bestimmt sind. Beachten wir zunächst, daß

$$\xi + \eta = 2\pi - \zeta,$$

so folgt

$$\cos\xi \cdot \cos\eta - \sin\xi \cdot \sin\eta = \cos\zeta,$$

oder, wenn wir die Sinus eliminieren,

$$\cos^2\xi + \cos^2\eta + \cos^2\zeta - 2\cos\xi \cdot \cos\eta \cdot \cos\zeta = 1.$$

Diese Beziehung läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\zeta & \cos\eta \\ \cos\zeta & 1 & \cos\xi \\ \cos\eta & \cos\xi & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzen wir hierin die aus Gl. (9) sich ergebenden Werte von $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ ein, so erhalten wir nach einigen Umformungen

$$\begin{vmatrix} 0 & f^2+g^2 & f^2+h^2 & l'^2 & 1 \\ f^2+g^2 & 0 & g^2+h^2 & m'^2 & 1 \\ f^2+h^2 & g^2+h^2 & 0 & n'^2 & 1 \\ l'^2 & m'^2 & n'^2 & 0 & \tau^2 \\ 1 & 1 & 1 & \tau^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für τ^2; vorausgesetzt, daß sie reelle und positive Wurzeln hat, so erhalten wir, wenn wir eine derselben in (9) einsetzen, $\cos \xi$, $\cos \eta$, $\cos \zeta$, und damit auch diese Winkel selbst, wie behauptet war.

Schlußbemerkung. Die in diesem Kapitel auseinandergesetzten Betrachtungen lassen sich, wenn sie nur leichthin verallgemeinert werden, zur Lösung der Fundamentalaufgabe der Reliefperspektive heranziehen, welche lautet: „Die einzelnen Punkte P einer Figur $\mathfrak{F}$ sind durch ihre kartesischen Koordinaten in bezug auf drei zueinander rechtwinklige Achsen OX, OY, OZ bestimmt. Ferner ist eine räumliche Homologie gegeben mit dem Zentrum C, ihrer Ebene π und einer ihrer Fluchtebenen ι; man soll punktweise die transformierte Figur $\mathfrak{F}_r$ zeichnen."

Um unsere Behauptung nachzuweisen, wollen wir die den Achsen OX, OY, OZ in der gegebenen Homologie entsprechenden Geraden mit O_rX_r, O_rY_r, O_rZ_r bezeichnen. Auf O_rX_r nehmen wir den Punkt O_r als Anfangspunkt der Abszissen x_r und als positiv jenen Sinn, in dem sich ein Punkt bewegt, der einem die OX-Achse in positivem Sinne durchlaufenden Punkte entspricht; analoges gilt für O_rY_r, O_rZ_r. Dann besteht zwischen den Abszissen x und x_r der beiden auf OX und O_rX_r liegenden und mit C allineierten Punkte P und P_r eine Beziehung vom Typus der Gl. (1), und analoges gilt für die anderen Koordinaten. Betrachten wir jetzt von neuem das „projizierende Quader" (vgl. Fig. 159a), so können wir auch hier zunächst die Punkte Q_r, R_r, S_r konstruieren und dann die Vierecke, die den Parallelogrammen $OQVR$ und $OSPV$ entsprechen; die Ecke P_r des letzteren wird die gesuchte Projektion P_r des Punktes P sein.

Die Mehrzahl der in diesem Kapitel aufgestellten Sätze bleiben auch für die Reliefperspektive bestehen; jedoch muß, da jetzt die Winkel ξ, η, ζ, Seiten eines Trieders sind, die Gleichung (8) durch die folgende Ungleichung ersetzt werden

$$\xi + \eta + \zeta > 2\pi.$$

Fünftes Buch.

Photogrammetrie.

Erstes Kapitel.

Definitionen und Hilfssätze.

129. Bei manchen Gelegenheiten, die sich, sei es in der Theorie, sei es in der Praxis, darbieten, benötigt man ein zuverlässiges und möglichst schnelles Verfahren für die Lösung der folgenden beiden Aufgaben, auf deren Spezialfälle wir schon verschiedentlich gestoßen sind (vgl. Nr. 18—19, 49, 85, 89—90):

1. Gegeben die Projektionen einer Figur von zwei gegebenen Zentren auf zwei gegebene Ebenen: man soll ihre Projektion von einem dritten Zentrum auf eine bestimmte dritte Ebene finden. Z. B.: Es seien zwei Photogramme eines Gebäudes gegeben; man will die Orthogonalprojektion auf eine zur Front parallele Ebene haben; oder man hat von einem Gelände zwei photographische Aufnahmen von erhöhten Punkten aus, und will daraus den Grundriß des Geländes erhalten.

2. Man hat n Zentralprojektionen einer Figur, aber von der Lage nach unbekannten Zentren: welche Folgerungen lassen sich daraus über die Gestalt, die Lage und die Eigenschaften der betreffenden Figur ziehen? Insbesondere, ist es möglich, sie danach zu rekonstruieren? Z. B.: Man hat von einem Denkmal vier Aufnahmen von unbekannten Standpunkten aus; läßt es sich daraus rekonstruieren?

Wir nennen nun jenen Teil der darstellenden Geometrie, der uns lehrt, solche Aufgaben zu lösen, (theoretische) **Photogrammetrie.** Bevor wir an die Lösung dieser Aufgaben gehen, schicken wir einige andere voraus, die sich binnen kurzem als nützlich erweisen werden.

130. I. In einer Ebene sind vier Punkte A, B, C, D gegeben, von denen keine drei in gerader Linie liegen: man soll den Ort eines Punktes P bestimmen von der Art, daß das Doppelverhältnis der vier Strahlen $P(A, B, C, D)$ einen gegebenen Wert μ hat.

Durch A ziehen wir einen Strahl a, der mit den drei anderen AB, AC, AD das Doppelverhältnis μ bildet, es gibt dann einen einzigen und bestimmten Kegelschnitt Γ, der durch die vier Punkte geht und in A die Gerade a berührt. Ist nun P ein beliebiger Punkt von Γ, so ist bekanntlich das Doppelverhältnis der vier Strahlen $P(A, B, C, D)$ gleich jenem, das der Strahl a mit den dreien AB, AC, AD bildet, folglich gehört P dem gesuchten Orte an. Dagegen jeder Punkt N außerhalb von Γ gehört nicht diesem Orte an; wenn nämlich der Strahl AN (außer in A) Γ zum zweiten Male in M schneidet, so hätten wir $M(A, B, C, D) = \mu$, und daher wäre auch $N(A, B, C, D) = \mu$, die beiden Strahlenquadrupel wären demnach projektiv mit einem gemeinsamen Strahle (der Geraden AMN), und daher auch perspektiv, und die Punkte B, C, D lägen in gerader Linie, was gegen die Voraussetzung ist. Γ ist also der gesuchte geometrische Ort. — Wir wollen der Kürze wegen sagen: „Der Kegelschnitt Γ faßt das Doppelverhältnis μ."

II. Zwei bestimmte, jedoch nicht vollständig gezeichnete Kegelschnitte Γ_1, Γ_2 gehen durch drei bekannte Punkte A, B, C: den vierten gemeinsamen Punkt X zu finden.

Wir ziehen durch A und B zwei beliebige Geraden a, b, die die beiden Kegelschnitte in F_1, F_2 und G_1, G_2 schneiden; nun betrachten wir die beiden Vierecke ABF_1G_1 und ABF_2G_2, die den Kegelschnitten Γ_1 und Γ_2 einbeschrieben sind, als geschnitten durch die Transversale CX. Es entstehen dann auf dieser (zufolge des Satzes von Desargues) zwei Involutionen, die sowohl das Paar C, X, als auch das Paar L, M gemeinsam haben, das durch die Schnitte der Transversalen mit den Geraden a, b entsteht. Infolgedessen fallen diese beiden Involutionen zusammen, und daher entspricht dem Punkte $Q \equiv AB \cdot CX$ derselbe Punkt in beiden; demnach schneiden die Geraden F_1G_1 und F_2G_2 die CX in demselben Punkte P, oder, wenn man will: die Gerade CX geht durch den Punkt $P \equiv F_1G_1 \cdot F_2G_2$. Da nun die Kegelschnitte Γ_1, Γ_2 bestimmt sind (beispielsweise jeder durch zwei weitere Punkte außer A, B, C), so lassen sich die Punkte F_1, G_1, F_2, G_2 bestimmen (z. B. durch den Pascalschen Satz); dadurch findet man den Punkt P, verbindet ihn mit C und findet damit den Punkt, in welchem CP den Kegelschnitt Γ_1 (oder Γ_2) zum zweiten Male schneidet; dieser ist dann der gesuchte.

III. Gegeben ein Strahlenbüschel $O(a, b, c \ldots)$ und eine zu ihm projektive Punktreihe $r(A, B, C \ldots)$: das erstere so zu legen, daß es perspektiv zur zweiten wird.

Um das zu erreichen, genügt es offenbar, zu bewirken, daß drei beliebige Strahlen a, b, c des Büschels durch die drei entsprechenden Punkte A, B, C der Punktreihe laufen. Zu dem Zwecke fassen wir

jeden Strahl m des Büschels als aus zwei Halbstrahlen m_1, m_2 bestehend auf, in die er durch O geteilt wird. Alsdann ist, nachdem ein positiver Sinn der Drehung festgelegt ist, der Winkel zweier beliebiger Halbstrahlen m_1 und n_1 (abgesehen von einem Vielfachen von 2π) unzweideutig bestimmt; er ist dann gleich dem der beiden ergänzenden Halbstrahlen m_2 und n_2, und der Supplementwinkel liegt zwischen dem einen und der Ergänzung des anderen Halbstrahles. Nachdem dies vorausgeschickt, beschreibe man über $\overline{AB}$ den Kreis, dessen beide Bogen den $\sphericalangle\, a_1 b_1$ und sein Supplement fassen und über $\overline{BC}$ jenen, der den $\sphericalangle\, b_1 c_1$ und dessen Supplement faßt; diese beiden, die schon den Punkt B gemeinsam haben, schneiden sich in einem zweiten Punkte S, von dem aus die Punktreihe $A, B, C\ldots$ offenbar durch ein dem gegebenen gleiches Büschel projiziert wird. Nachdem man so eine Lösung der Aufgabe gefunden hat, ergibt sich bald eine zweite, wenn man den zur Geraden r in bezug auf S symmetrischen Punkt S' ins Auge faßt.

IV. Gegeben zwei einander projektive Strahlenbüschel $O(a, b, c\ldots)$ und $O'(a', b', c'\ldots)$, sowie zwei Punkte M, M' auf zwei entsprechenden ihrer Strahlen m, m': durch jene Punkte zwei Geraden zu ziehen, so daß sie die beiden Büschel in zwei gleichen Punktreihen schneiden.

Wir betrachten in den beiden Büscheln die sich entsprechenden zueinander rechtwinkligen Strahlen p, q und p', q'. Beachten wir, daß eine Projektivität mit drei zusammenfallenden Elementen eine Identität ist, so erkennen wir alsbald, daß die gestellte Aufgabe sich auf folgende zurückführen läßt: „Durch die Punkte M und M' zwei Geraden zu ziehen, so daß, wenn P, Q und P', Q' die Schnitte mit den Geraden p, q und p', q' sind, $\overline{MP} = \overline{M'P'}$ und $\overline{MQ} = \overline{M'Q'}$ wird." Die einfachste Art der Lösung besteht darin, daß man die beiden Punkte M, M' auf die beiden betrachteten Geraden als Koordinatachsen bezieht; sind x, y die Koordinaten von M, und x', y' die von M', ferner X, Y die laufenden Koordinaten, und nehmen wir an, daß

$$(X - x) = k(Y - y), \quad (X - x') = k'(Y - y')$$

die Gleichungen der gesuchten Geraden seien, so sieht man alsbald, daß die Bedingungen der Aufgabe sich auf die beiden Gleichungen zurückführen lassen

$$(1 + k^2)y^2 = (1 + k'^2)y'^2; \quad \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)x^2 = \left(1 + \frac{1}{k'^2}\right)x'^2.$$

Hieraus folgt

$$k = \frac{x}{y}\sqrt{\frac{y^2 - y'^2}{x'^2 - x^2}}, \quad k' = \frac{x'}{y'}\sqrt{\frac{y^2 - y'^2}{x'^2 - x^2}}.$$

Diese Beziehungen genügen zur Bestimmung der Lage der durch M und M' zu ziehenden Geraden. — Damit die Aufgabe lösbar sei, muß $|x|<|x'|$, wenn $|y|>|y'|$, und $|x|>|x'|$, wenn umgekehrt $|y|<|y'|$. Um diese Bedingung geometrisch auszudrücken, denken wir uns O und O' zusammenfallend (Fig. 160), ebenso p mit p', q mit q', und fällen von M die Lote MH und MK auf die Geraden p und q. Dann ist für die Lösbarkeit der Aufgabe notwendig und hinreichend, daß der Punkt M' sich außerhalb des Rechteckes $OHMK$ befinde, jedoch innerhalb eines der Streifen, die von den Geraden MH, q bzw. MK, p begrenzt werden. Wenn M und M' sich in einer derartigen Lage gegenseitig befinden, so sagt man, daß sie sich in dem für die Lösung der Aufgabe **günstigen** Gebiete der Ebene befinden; vgl. Fig. 160, wo dieses Gebiet schraffiert dargestellt ist.

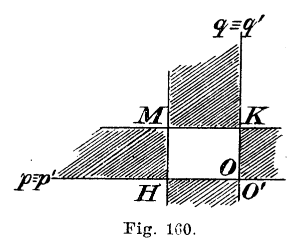


Fig. 160.

Zweites Kapitel.

Fundamentalkonstruktionen.

131. Es seien π_1 und π_2 zwei beliebige Ebenen des Raumes, die wir als Projektionsebenen, C_1 und C_2 zwei beliebige Punkte, die wir als Projektionszentren nehmen wollen. Ist nun $\mathfrak{F}$ eine beliebige Raumfigur, so sollen $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ ihre Projektionen von C_1 aus auf π_1 und von C_2 aus auf π_2 sein. Die Gerade C_1C_2 schneidet die beiden Ebenen π_1 und π_2 in zwei bestimmten Punkten, die wir mit C_2' und C_1'' bezeichnen wollen, da ja der erstere die von C_1 auf π_2 gemachte Projektion des Punktes C_2 ist, während der letztere die des Punktes C_1 von C_2 aus auf π_2 ist: sie heißen der **erste** und **zweite Kernpunkt**. Die Schnittlinie der beiden Ebenen π_1, π_2 können wir mit t_{12} oder t_{21} bezeichnen und sie die **Fundamentalgerade** nennen; sie ist der Ort der Punkte, deren beide Projektionen zusammenfallen. Ist nun P (Fig. 161) ein beliebiger Punkt des Raumes und sind P', P'' seine Projektionen, so liegen die Geraden C_1PP' und C_2PP'' in derselben Ebene C_1C_2P, in der sich auch die Geraden $C_2'P'$ und $C_1''P''$ befinden; die erstere von diesen liegt in π_1, die andere in π_2, daher schneiden sie sich in dem Punkte P_{12} (oder P_{21}), der den drei Ebenen π_1, π_2, C_1C_2P gemeinsam ist. Diese Tatsache läßt sich allgemein so ausdrücken:

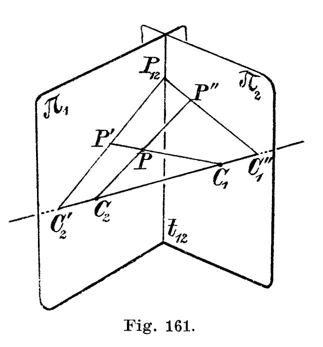


Fig. 161.

Die Verbindungslinien der beiden Projektionen eines Punktes im Raume (von zwei beliebigen Zentren auf zwei beliebige Ebenen) mit den entsprechenden Kernpunkten schneiden sich auf der Schnittlinie der beiden Projektionsebenen.

Dieser Satz verdient, trotz seiner äußersten Einfachheit, doch wegen der fortwährenden Anwendungen, den Namen Fundamentalsatz, mit dem wir ihn in der Folge bezeichnen wollen.

Beispiele: 1. Sind π_1 und π_2 zueinander senkrecht, und die fraglichen Projektionen orthogonale, so verwandelt sich jener Satz in jenen, den man als den „Fundamentalsatz der Mongeschen Methode" bezeichnen könnte, nämlich: Die von den Projektionen eines Punktes auf die Achse gefällten Lote haben denselben Fußpunkt.

2. Fallen π_1 und π_2 zusammen, so ist die Fundamentalgerade unbestimmt und die beiden Kernpunkte fallen in einen Punkt C_1 zusammen, und da nun die Geraden CP', CP'' einen unbestimmten Schnittpunkt haben müssen, so fallen sie zusammen; mit anderen Worten P', P'', C liegen in einer Geraden. Es ist dies die Fundamentaleigenschaft der bizentralen Projektion (vgl. die Anwendung 2 in Nr. 85).

132. Aus dem dargelegten Fundamentalsatze ergibt sich, wenn man die Projektionen beliebiger Punkte $A, B, C \ldots$ des Raumes betrachtet, daß dann zwei Büschel $C_2'(A', B', C' \ldots)$ und $C_1''(A'', B'', C'' \ldots)$ entstehen, die beide perspektiv mit der auf dem Träger t_{12} entstehenden Punktreihe $A_{12}, B_{12}, C_{12} \ldots$ sind. Sobald wir aber die beiden Ebenen π_1 und π_2 verschieben (d. h. ihre frühere gegenseitige Lage aufheben), so werden diese beiden Büschel aufhören, perspektiv zu sein, werden jedoch projektiv bleiben. Nehmen wir an, daß diese Projektivität zwischen den beiden Büscheln bekannt sei, und nehmen wir beliebig einen Punkt X' in π_1 an, so wird X'' nicht bestimmt sein, sondern nur der Bedingung genügen, auf demjenigen Strahle des Büschels C_1'' zu liegen, der dem Strahle $C_2'X'$ des ersten Büschels entspricht. Jener Strahl ist im allgemeinen bestimmt; er würde aufhören, es zu sein, nur wenn X' mit C_2' zusammenfiele, daher entsprechen diesem Punkte die sämtlichen Punkte von π_2. In ähnlicher Weise entsprechen einem Punkte X'' von π_2 alle Punkte einer bestimmten Geraden in π_1, ausgenommen, wenn X'' mit C_1'' zusammenfällt, in welchem Falle ihm alle Punkte von π_1 entsprechen würden.

Nehmen wir an, daß die Ebenen π_1, π_2 sich nicht mehr in ihrer ursprünglichen (orientierten) Lage befinden. **Es sei einer der Kernpunkte** (z. B. C_2') **gegeben, außerdem fünf Paare entsprechender Punkte** $P_i'P_i''(i = 1, 2 \ldots 5)$, **gebildet von den beiden Projektionen desselben Punktes im Raume, so wird behauptet, daß dadurch der**

andere Kernpunkt bestimmt ist und sich konstruieren läßt. Dieser muß nämlich folgender Bedingung genügen

$$C_2'(P_1' \ldots P_5') \barwedge C_1''(P_1'' \ldots P_5''),$$

die sich in die beiden anderen zerlegen läßt

$$C_2'(P_1'P_2'P_3'P_4') \barwedge C_1''(P_1''P_2''P_3''P_4''),$$
$$C_2'(P_1'P_2'P_3'P_5') \barwedge C_1''(P_1''P_2''P_3''P_5'').$$

Die erste dieser Beziehungen besagt nun (vgl. Nr. 130, I), daß C_1'' auf dem Kegelschnitte Γ_1 liegt, der durch die Punkte $P_1'', P_2'', P_3'', P_4''$ geht und das Doppelverhältnis $C_2'(P_1'P_2'P_3'P_4')$ faßt, während die zweite besagt, daß C_1'' auf dem Kegelschnitte Γ_2 liegt, der durch $P_1'', P_2'', P_3'', P_4''$ geht und das Doppelverhältnis $C_2'(P_1'P_2'P_3'P_5')$ faßt. Γ_1 und Γ_2 haben die Punkte P_1'', P_2'', P_3'' gemeinsam, daher schneiden sie sich in einem anderen vierten Punkte, den man linear bestimmen kann (Nr. 130, II) und der der gesuchte Kernpunkt ist.

Sind mehr als fünf Paare entsprechender Punkte in den beiden Ebenen π_1, π_2 gegeben, so lassen sich daraus beide Kernpunkte konstruieren. **Sind z. B. die vier Paare von Projektionen der Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, die in einer Ebene σ liegen, sowie außerdem die von zwei anderen, nicht in σ gelegenen Punkten P_5 und P_6 gegeben[1]), so wird behauptet, daß dadurch die beiden Kernpunkte bestimmt sind.** Um dies zu beweisen, ziehen wir die Gerade C_1P_5 und nennen ihren Schnitt mit σ Q_5. Da Q_5 und P_5 demselben Projektionsstrahle angehören, fällt Q_5' mit P_5' zusammen; um nun Q_5'' zu erhalten, beachten wir, daß die beiden Gruppen $P_1'P_2'P_3'P_4'Q_5'$ und $P_1''P_2''P_3''P_4''Q_5''$, da sie zwei Projektionen von fünf Punkten derselben Ebene sind, zueinander projektiv sein müssen: die Projektivität zwischen ihnen ist aber durch die vier Paare entsprechender Punkte P_i', $P_i''(i = 1 \ldots 4)$ vollständig bestimmt. Folglich kann man durch ein Verfahren, das die projektive Geometrie lehrt, den dem Punkte $Q_5' \equiv P_5'$ entsprechenden Punkt Q_5'' konstruieren. Da nun C_1, P_5, Q_5 allineiert sind, so werden auch C_1'', P_5'', Q_5'' in gerader Linie liegen, C_1'' wird sich also auf der nun bekannten Geraden $P_5''Q_5''$ befinden. Verfahren wir nun mit dem Punkte P_6 wie mit P_5, so bekommen wir eine zweite Gerade $P_6''Q_6''$, die ebenfalls C_1'' enthält, wodurch dieser Kernpunkt völlig bestimmt ist. Um den anderen Kernpunkt zu finden, könnte man ebenso verfahren, indem man die Rolle der beiden Zentren C_1, C_2 vertauscht, man kann jedoch auch auf das vorhin angegebene Verfahren, den Kernpunkt aus fünf Paaren entsprechender Punkte zu konstruieren, zurückgreifen.

---

1) Kennt man z. B. zwei Photogramme eines Gebäudes, so ist es nicht schwer, sechs Paare von Punkten aufzufinden, die der obigen Bedingung genügen.

Schließlich sei bemerkt, **daß man zur Konstruktion der beiden Kernpunkte auch sieben beliebige Paare entsprechender Punkte in den beiden Ebenen annehmen kann;** alsdann dient zur Auffindung der Kernpunkte selbst die Beziehung $C_2'(P_1' \ldots P_7) \barwedge C_1''(P_1'' \ldots P_7'')$. Die Konstruktion derselben ist aber ein Problem dritten Grades, das sich mit Lineal und Zirkel nicht lösen läßt.[1])

133. Es seien nun drei Projektionszentra C_1, C_2, C_3 gegeben und mit ihnen seien verknüpft bzw. die drei Projektionsebenen π_1, π_2, π_3 (Fig. 162). Verknüpfen wir diese drei Projektionssysteme auf alle möglichen Arten, so erhalten wir im ganzen sechs Kernpunkte, nämlich auf der Ebene

π_1 die Kernpunkte C_2' und C_3',
π_2 „ „ C_3'' „ C_1'',
π_3 „ „ C_1''' „ C_2'''.

Wir wollen zwei Kernpunkte **korrespondierende** nennen, wenn sie (wie C_1'' und C_1''') die Projektionen desselben Zentrums sind, dagegen **gegnerische**, wenn sie sich (wie C_2''' und C_3'') auf der Verbindungslinie zweier Zentra befinden. Ferner haben wir jetzt drei Fundamentalgeraden, nämlich

$t_{23} \equiv t_{32}$ als Schnittlinien der Ebenen π_2 und π_3,
$t_{31} \equiv t_{13}$ „ „ „ „ π_3 „ π_1,
$t_{12} \equiv t_{21}$ „ „ „ „ π_1 „ π_2.

Die Geraden $C_2'C_3'$, $C_1''C_3''$, $C_2'''C_1'''$, von denen jede durch zwei in derselben Projektionsebene liegende Kernpunkte geht, sind nichts anderes als die Schnitte der Ebene $C_1C_2C_3$ mit den Ebenen π_1, π_2, π_3 bzw.; sie bilden daher ein Dreieck, dessen Ecken T_1, T_2, T_3 die Spurpunkte der drei Fundamentalgeraden mit der Ebene $C_1\,C_2\,C_3$ sind. Die Seiten dieses Dreiecks heißen die Achsen; jede Projektionsebene enthält daher eine Achse, auf der dann zwei Kernpunkte liegen.

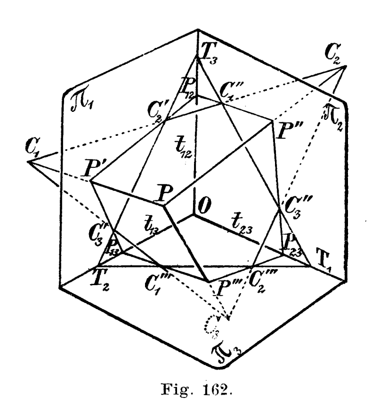


Fig. 162.

Wir betrachten jetzt die drei Projektionen P', P'', P''' eines Punktes P im Raume; sie sind im allgemeinen drei verschiedene Punkte (von denen wir der Kürze halber sagen wollen, sie bilden ein

1) Es ist das *Problem der Projektivität in der Ebene*; s. R. Sturm, Math. Ann. Bd. I, S. 533 ff.

Tripel); zwei von ihnen fallen aber zusammen, wenn P einer der Fundamentalgeraden angehört, alle drei fallen zusammen, wenn P in den Scheitel O des Dreiflachs der Projektionsebenen hineinfällt.

Jetzt wenden wir auf jedes der betrachteten Projektionssysteme den Fundamentalsatz der Photogrammetrie (Nr. 131) an. Dann sehen wir: es schneiden sich die Geraden

$C_3''P''$	und	$C_2'''P'''$	in einem Punkte	P_{23}	der Fundamentalgeraden	t_{23},
$C_1'''P'''$	"	$C_3'P'$	" " "	P_{31}	" "	t_{31},
$C_2'P'$	"	$C_1''P''$	" " "	P_{12}	" "	t_{12}.

Sind daher die Punkte P' und P'' gegeben (derart, daß sie der Bedingung des Fundamentalsatzes entsprechen), so kann man die Geraden $C_3'P'$ und $C_3''P''$ ziehen; sie schneiden t_{13} und t_{23} bzw. in P_{13} und P_{23}; zieht man nun $P_{13}C_1'''$ und $P_{23}C_2'''$, so schneiden sich diese in dem Punkte P''', der im allgemeinen eindeutig bestimmt ist. Somit gelangen wir zu einer sehr einfachen **Konstruktion, die dritte Zentralprojektion eines Punktes zu finden, von dem man zwei Projektionen kennt** (vgl. Nr. 129, Aufg. I). Um sie in der Praxis bequem ausführen zu können, denke man sich das Dreiflach $\pi_1\pi_2\pi_3$ längs der Geraden t_{12} aufgeschnitten, und lasse dann die beiden Flächen π_1 und π_2 sich um die Geraden t_{13} bzw. t_{23} drehen, bis sie in die Ebene π_3 fallen, die als Zeichenebene dienen soll.

Zwei beliebig in den Ebenen π_1 und π_2 gezeichnete Geraden g', g'' sind die Projektionen einer Geraden g des Raumes, die im allgemeinen eindeutig bestimmt ist; es ist nämlich die Gerade $(C_1g' \cdot C_2g'')$; die dritte Projektion g''' kann man erhalten, wenn man zwei beliebige Punkte auf g selbst betrachtet und in der oben angegebenen Weise deren dritte Projektion konstruiert.

134. Die allgemeine Konstruktion von P''', wenn P' und P'' gegeben sind, wird illusorisch, wenn P' auf der Achse T_2T_3 von π_1 liegt. Dann fällt nämlich P_{12} auf T_3 und P_{13} auf T_2; P'' liegt dann auf T_3C_1'', d. h. auf der zweiten Achse und P_{23} fällt auf T_1; die beiden Geraden $P_{13}C_1'''$ und $P_{23}C_2'''$ fallen demnach mit der dritten Achse zusammen und sind also nicht imstande, P''' zu bestimmen. Um einzusehen, daß nichtsdestoweniger, wenn auch die Punkte P' und P'' auf der ersten bzw. zweiten Achse gegeben sind, P''' dennoch bestimmt ist, betrachten wir einen beliebigen Punkt Q auf der Geraden OP; wir nehmen dann Q' auf OP' und Q'' auf OP'', natürlich so, daß die Bedingung des Fundamentalsatzes erfüllt ist, und suchen nach dem allgemeinen Verfahren Q'''; die Gerade OQ''' schneidet die in π_3 liegende Achse in P'''. Hieraus gewinnt man zugleich den Satz: **Wenn eine der Projektionen eines Punktes auf die entsprechende Achse fällt, so tritt dies auch für die beiden anderen ein.** Zu

diesem Falle, in dem allein scheinbar zwei Projektionen eines Punktes nicht zur Bestimmung der dritten ausreichen, bildet ein anderer Fall von tatsächlicher Unbestimmtheit ein Seitenstück, welches erwähnt zu werden verdient. Betrachten wir nämlich einen Punkt P, dessen erste Projektion mit dem Kernpunkte C_2' zusammenfällt; dann ist P ein Punkt der Geraden C_1C_2, und nun können sich zwei Fälle darbieten: 1. P ist ein von C_2 verschiedener Punkt von C_1C_2; dann fällt P'' auf C_1'', den zu C_2' korrespondierenden Kernpunkt; P''' liegt auf der Achse T_1T_2 und ist völlig bestimmt, wenn der betreffende Punkt selbst gegeben ist, jedoch nicht durch die beiden Projektionen $P' \equiv C_2'$ und $P'' \equiv C_1''$. 2. P fällt mit C_2 zusammen; dann fällt P''' auf C_2''', den zu C_2' gegnerischen Kernpunkt, während P'' ein beliebiger Punkt von π_2 ist. Wir können demnach sagen:

Fällt ein Punkt eines Tripels in einen Kernpunkt, so trifft dies auch für einen zweiten Punkt zu; das Zusammenfallen kann in dem gegnerischen oder in dem korrespondierenden Kernpunkte stattfinden, doch in jedem Falle ist der dritte Punkt unbestimmt, d. h. es entspricht zwei korrespondierenden Kernpunkten ein beliebiger Punkt der dritten Projektionsebene, zwei gegnerischen ein beliebiger Punkt der Achse der dritten Bildebene.

135. Die in Nr. 133 angegebene Konstruktion spezialisiert sich für besondere Lagen der Grundelemente und geht in gewissen Fällen auf einige schon bekannte Konstruktionen zurück, wie folgende Beispiele zeigen.

1. π_1, π_2, π_3 bilden ein dreirechtwinkliges Dreiflach und C_1, C_2, C_3 seien die entsprechenden Zenithe; dann haben wir wieder das in Nr. 19 angegebene Verfahren, aus Grund- und Aufriß den Seitenriß zu finden.

2. π_1 und π_2 seien noch zueinander senkrecht, jedoch π_3 sei nur zu π_2 senkrecht und es handle sich um Orthogonalprojektion: dann kommen wir auf anderem Wege zu dem in Nr. 49 dargelegten Verfahren der Verlegung einer Bildebene bei der Mongeschen Methode.

3. π_1 und π_2 seien Grund- und Aufrißebene eines Mongeschen Systems, π_3 jedoch falle mit π_1 zusammen und C_3 befinde sich in beliebiger Lage. Dann verwandelt sich die allgemeine Konstruktion in die in Nr. 91 dargelegte: **aus Grund- und Aufriß einer Figur die perspektivische Darstellung auf die Grundrißebene von einem gegebenen Zentrum aus zu finden.**

4. π_1, π_2, π_3 fallen in eine einzige Ebene π zusammen, und C_3 sei deren Zenith, während C_1 und C_2 beliebig sind. Dann handelt es sich um die **Konstruktion der Orthogonalprojektion auf eine Ebene, wenn man die bizentrale Darstellung** (vgl. Nr. 85) **auf dieselbe Ebene kennt.**

5. Schließlich sei noch ein neuer Fall betrachtet, der von praktischer Bedeutung ist (in der Architektur), nämlich folgende Aufgabe: **Gegeben die beiden Orthogonalprojektionen einer Figur auf zwei vertikale Ebenen π_1, π_2: gesucht die Zentralprojektion von einem gegebenen Zentrum C_3 aus auf eine gegebene dritte, ebenfalls vertikale Ebene π_3.** In diesem Falle liegt der Punkt O im Unendlichen, und die drei Fundamentalgeraden t_{23}, t_{31}, t_{12} sind einander parallel; die Ebene $C_1C_2C_3$ ist (weil C_1 und C_2 unendlich fern in der zu π_1 bzw. π_2 senkrechten Richtung liegen) die durch C_3 senkrecht zu der gemeinsamen Richtung der drei Fundamentalgeraden gelegte Ebene. Die Kernpunkte C_3' und C_3'' sind die Orthogonalprojektionen von C_3 auf π_1 und π_2, während C_1''' und C_2''' die Punkte der Geraden T_1T_2 sind, in denen die Ebene π_3 von den Geraden C_3C_3' und C_3C_3'' geschnitten wird. — Um nun hier die Projektion P''' eines Punktes, von dem die beiden Orthogonalprojektionen P', P'' gegeben sind, tatsächlich zu konstruieren, heben wir die Lage der Grundelemente, die sie ursprünglich besaßen, auf und denken uns die von π_1, π_2, π_3 gebildete prismatische Fläche längs der Kante t_{12} aufgeschnitten, und lassen dann π_1 und π_2 um die Kanten t_{13} und t_{23} sich drehen, bis sie in die π_3 fallen, die wir als Zeichenebene wählen wollen. Es seien dann (t_{12}) und $(t_{12})^*$ die neuen Lagen, die die Gerade t_{12} annimmt. Da das Dreieck $T_1T_2T_3$ ein Normalschnitt der genannten prismatischen Fläche ist, so fallen die Geraden $T_1(T_3)$ und $T_2(T_3)^*$ auf die Gerade T_1T_2, die senkrecht zur gemeinsamen Richtung von t_{13}, t_{23}, (t_{12}), $(t_{12})^*$ läuft. Auf dieser Geraden, die schon die Punkte C_1''', C_2'''

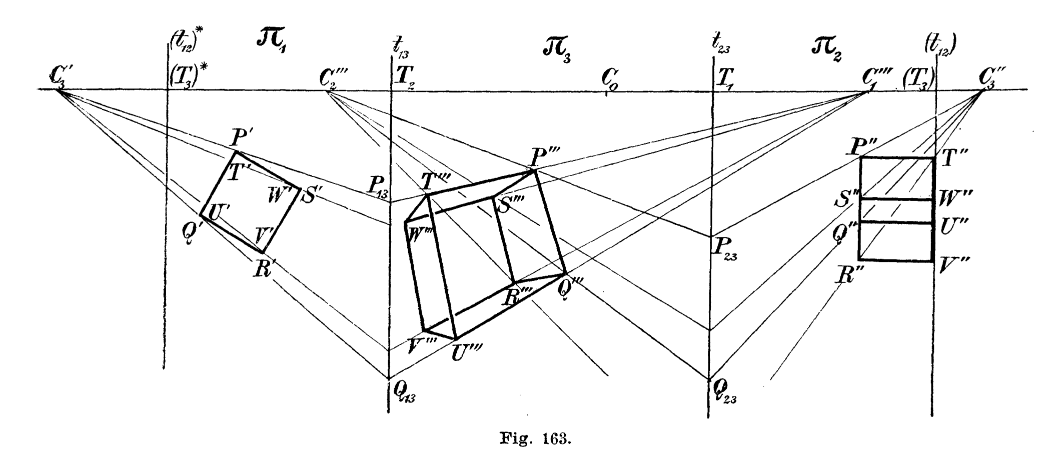


Fig. 163.

enthält, kommen auch die Umlegungen von C_3' und C_3'' als (C_3') und (C_3'') zu liegen. Zwei Punkte P', P'', die erste und zweite Projektion desselben Raumpunktes waren, erhalten dann die neuen Lagen (P'),

(P''), deren Verbindungslinie offenbar parallel zur Geraden $T_1 T_2$ wird (senkrecht zu t_{13} und t_{23}). P''' ergibt sich dann zufolge der allgemeinen Konstruktion, die im vorliegenden Falle so lautet: Man ziehe die Gerade $C_3'(P')$; ihr Schnitt mit t_{13} ist P_{13}; dann ziehe man $P_{13}C_1'''$. Ebenso verbinde man C_3'' mit P'', welche Gerade t_{23} in P_{23} trifft; dann ziehe man $P_{23}C_2'''$, und diese Gerade trifft $P_{13}C_1'''$ in dem gesuchten Punkte P'''. — Diese Konstruktion ist in der vorigen Figur 163 für den Würfel $P, Q, \ldots W$, dessen Fläche $TUVW$ in π_1 liegt, ausgeführt, für den Fall, daß π_2 senkrecht zu π_1 ist, und π_3 mit π_1 und π_2 einen Winkel von 45^0 bildet. Der Einfachheit halber sind die Umlegungen nicht alle mit den Klammern versehen.

Zur Übung: Weshalb müssen in Fig. 163 die zu π_1 senkrechten Würfelkanten in C_1''' zusammenlaufen?

Es mögen noch einige Bemerkungen hinzugefügt werden, die von praktischem Nutzen sind. Zunächst kann man davon absehen, die Geraden (t_{12}) und $(t_{12})^*$ zu zeichnen, da sie in keiner Weise bei der oben angeführten Konstruktion Verwendung finden. Ferner behaupten wir, daß man für die Geraden t_{13} und t_{23} irgendwelche beliebige unter sich parallele Linien in der Zeichenebene nehmen kann, und überdies noch (abgesehen von einer noch zu besprechenden Einschränkung) die Kernpunkte C_1''', C_2''', (C_3'), (C_3'') nach Belieben auf einer gemeinsamen zu jenen Geraden senkrechten Geraden wählen kann. Zum Beweise zeigen wir zunächst, daß durch jene Daten die Breite der Flächen $t_{12}t_{13}$ und $t_{12}t_{23}$ bestimmt werden kann, die die prismatische Fläche der drei Projektionsebenen bilden, mit anderen Worten, daß man dadurch die Bestimmung des Dreiecks $T_1 T_2 T_3$, welches der Normalschnitt dieser Fläche ist, vervollständigen kann. Betrachten wir nämlich die auf dieser Schnittgeraden gelegenen Kernpunkte, so muß, da $\sphericalangle C_1'''C_3'T_2 = \frac{\pi}{2}$, C_3' auf dem über $C_1'''T_2$ als Durchmesser beschriebenen Kreise liegen; da $\overline{T_2C_3'} = \overline{T_2(C_3')}$, so ist C_3' bestimmt und wird reell, wenn nur

$$\overline{T_2(C_3')} < \overline{T_2C_1'''}.$$

Ebenso bestimmen der Kreis über $\overline{C_2'''T_1}$ als Durchmesser und der um T_1 mit $\overline{T_1(C_3'')}$ beschriebene den Kernpunkt C_3'', der reell wird, wenn

$$\overline{T_1(C_3'')} < \overline{TC_2'''}.$$

Hat man die Punkte C_3' und C_3'' erhalten, und verbindet sie mit T_2 und T_1 bzw., so liefert der Schnittpunkt der Verbindungslinien die dritte Ecke T_3 der gesuchten Schnittgeraden.

Es dürfte auch von Interesse sein, zu erfahren, in welcher Weise man die Punkte T_1, T_2, C_1''', C_2''', (C_3'), (C_3'') zu wählen hat, damit

die beiden Ebenen π_1, π_2 zueinander senkrecht werden. Es muß alsdann das Dreieck $T_1 T_2 T_3$ bei T_3 rechtwinklig werden, es muß also

$$\sphericalangle T_1 + \sphericalangle T_2 = \frac{\pi}{2},$$

oder

$$\cos^2 T_1 + \cos^2 T_2 = 1;$$

nun ist aber

$$\cos T_1 = \frac{\overline{T_1 C_3''}}{\overline{T_1 C_2'''}} = \frac{\overline{T_1(C_3'')}}{\overline{T_1 C_2'''}} \quad \text{und} \quad \cos T_2 = \frac{\overline{T_2 C_3'}}{\overline{T_2 C_1'''}} = \frac{\overline{T_2(C_3')}}{\overline{T_2 C_1'''}};$$

folglich ist die gesuchte Bedingung:

$$\left[\frac{\overline{T_1(C_3'')}}{\overline{T_1 C_2'''}}\right]^2 + \left[\frac{\overline{T_2(C_3')}}{\overline{T_2 C_1'''}}\right]^2 = 1.$$

Man kann dies auch so ausdrücken, daß man sagt, $\overline{T_1(C_3'')}$ und $\overline{T_2(C_3')}$ müssen die Koordinaten eines Punktes der Ellipse sein, die die Strecken $T_1 C_2'''$ und $T_2 C_1''$ als Halbachsen hat. Man beachte auch, daß, wenn man die Strecken in dieser Weise wählt, auch die beiden vorigen Ungleichungen erfüllt werden. Die obige Bedingung muß beispielsweise erfüllt werden, wenn man will, daß π_1 und π_2 Aufriß- und Seitenrißebene eines Mongeschen Systems seien.

Drittes Kapitel.

Bestimmung einer Figur aus n Projektionen derselben.

136. Nachdem wir im vorigen Kapitel die erste von den zu Anfang von Nr. 129 aufgestellten Aufgaben wenigstens in ihren Grundzügen gelöst haben, gehen wir nun dazu über, uns mit der zweiten zu befassen.

Von einer Figur $\mathfrak{F}$ sei nur eine Projektion $\mathfrak{F}'$ auf eine Ebene π von einem unbekannten Zentrum aus gegeben. Um von $\mathfrak{F}'$ zu $\mathfrak{F}$ zu gelangen, können wir irgend einen der ∞^3 Punkte des Raumes als Zentrum nehmen. Ist nun P' ein Punkt von $\mathfrak{F}'$, so kann man als Punkt P irgend einen beliebigen der ∞^1 Punkte des Strahles CP' nehmen. Wenn also die Figur $\mathfrak{F}'$ aus einer endlichen Zahl r von Punkten besteht, so gibt es ∞^{r+3} Figuren $\mathfrak{F}$. **In jedem Falle aber gibt es ∞^7 zueinander projektive Figuren $\mathfrak{F}$, die $\mathfrak{F}'$ als Projektion auf π haben.** Nehmen wir nämlich an, wir hätten eine solche Figur $\mathfrak{F}_0$ gefunden, und es seien $P_0 Q_0 R_0 S_0$ vier beliebige Punkte derselben, und C_0 das zugehörige Projektionszentrum, dann gehen die Strahlen $C_0 P_0$, $C_0 Q_0$, $C_0 R_0$, $C_0 S_0$ durch die gegebenen Punkte P', Q', R', S' bzw. Nehmen wir nun beliebig einen anderen Punkt C_1 und ebenfalls beliebig auf den Geraden $C_1 P'$, $C_1 Q'$, $C_1 R'$, $C_1 S'$ die Punkte P_1,

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.